6.05.24.

Единственность в теореме 2.

$\exists$ о.н. с.к., в которой либо

(I) $Q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + c$, либо

(II) $Q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + 2\mu x_{r+1}$, $\mu > 0$ $(r<n)$

<u>Д-во единственности</u>. $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ опр. однозначно, с точн. до нумерации, т.к. это ненулевые собств. значения матрицы $q(x)$.

(I) - случай $\exists$ центра, $c = Q(o)$, o - любой центр.

Вид (I) не может превратиться во (II), т.к. (II) - нецентральный случай.

Единственность числа μ в случае (II)

Допустим, что в одной с.к. $\{O, e\}$, в другой с.к. $\{O', e'\}$ (e и e' - о.н.б.)

$Q = \dots + 2\mu x_{r+1}$,

$Q = \dots + 2\tilde{\mu} x_{r+1}$ причем $\tilde{\mu} \neq \mu$.

Матрица перехода от базиса e к e' имеет блочный вид

$C_{e \to e'} = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array}\right)$, $C_1 = C_{\{e_1, \dots, e_r\} \to \{e'_1, \dots, e'_r\}}$ $\langle e_1, \dots, e_r \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_r \rangle$ - базис подпр-ва, порожд. собств. с $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

$C_2 = C_{\{e_{r+1}, \dots, e_n\} \to \{e'_{r+1}, \dots, e'_n\}}$ - обе матрицы ортогональные. Коэфф. линейной формы $2\mu x_{r+1}$ преобр. по формуле

$(\tilde{\mu}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}) = (\mu, 0, \dots, 0) \cdot C_2$, $\mu > 0$, $\tilde{\mu} > 0$.

длина вект. при ортогон. замене сохраняется $\Rightarrow |\tilde{\mu}| = |\mu|$, а т.к. они > 0, то $\tilde{\mu} = \mu$, ч.т.д.

<u>Квадрики</u> (гиперповерхности 2-го порядка)

<u>Опр.1</u>. Пусть $Q: A \to F$ - аффинно-квадратичная ф-я [не являющаяся линейной]

Квадрика (или гиперпов. 2 порядка), задаваемая функцией Q - это $S(Q) = \{a \in A \mid Q(a) = 0\}$, если $S(Q) \neq \varnothing$

(при $n=2$ часто использ. слово „коника")

<u>Утв.1</u>. Любая прямая $\pi \subset A$ либо принадлежит поверхности $S = S(Q)$, либо пересекает её не более, чем в двух точках.

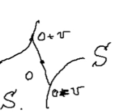
<u>Д-во</u>. $\forall a$, $b = a + tv$, $\pi \parallel v \neq 0$,

$Q(a+tv) = Q(a) + q(tv) + 2l(tv) = t^2 q(v) + 2t l(v) + Q(a) = 0$

Либо это рав-во тождеств., либо $q(v) \neq 0$ или $l(v) \neq 0 \Rightarrow$ $\exists$ не более двух корней t, ч.т.д.

<u>Опр.2</u>. Точка $o \in A$ - центр квадрики, если для любого $v \in V$ вместе с $o+v \in S \Rightarrow o - v \in S$

Точка o - вершина квадрики, если o - центр, $o \in S$



<u>Утв.2</u>. Если o - вершина, $a \in S$, $a \neq o$, то вся прямая, прох. через точки o и a, принадлежит S.

<u>Д-во</u>. Обозн. $v = \vec{oa}$, $o + t\vec{oa} \in S \Leftrightarrow o - t\vec{oa} \in S$

В частн., точки $o, a, a' = o - \vec{oa} \in S$ - три различные точки на $S \Rightarrow$ по утв.1, вся прямая $o + \langle v \rangle \subset S$, ч.т.д.

Заметим, что если o - центр, $Q(o+v) = q(v) + 2l(v) + c = 0$ $(c = Q(o))$

то $Q(o-v) = q(v) - 2l(v) + c = 0$

$(\operatorname{char} F \neq 2) \Rightarrow l(v) = 0$. Т.о., если o - центр квадрики $\Rightarrow l(v) = 0$.

Коорд. центра совп. с координатами центра $Q(x)$.

Между, центр. опр. системой уравнений

$\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \frac{\partial q}{\partial x_i} + 2a_i = 0$, где $l(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

<u>Замечание</u>. Квадрика, не являющаяся плоскостью, содержит хотя бы одну точку, которая не является вершиной.

Если допустить, что все точки $a \in S$ явл. вершинами, то любая прямая $(o, a) \subset S \Rightarrow S$ явл. плоскостью.

<u>Теорема</u>. Если $|F| = \infty$ $(\operatorname{char} F \neq 2)$, то

$S(Q_1) = S(Q_2) \Rightarrow \exists \lambda \in F, \lambda \neq 0: Q_2 = \lambda Q_1$.

<u>Д-во</u>. Если $Q_2 = \lambda Q_1$, $\lambda \neq 0$, то Q_2 задаёт ту же поверхность, что и Q_1.

<u>Обратно</u>. Пусть $S = S(Q_1) = S(Q_2)$.

Возьмем точку $o \in S$, не являющуюся вершиной.

Имеем: $Q_1(o) = 0$, $Q_2(o) = 0$.

Для $\forall v \in V$ запишем $Q_1(o+v) = q_1(v) + 2l_1(v)$, $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$

$Q_2(o+v) = q_2(v) + 2l_2(v)$,

Прямая $\pi = o + \langle v \rangle$ пересекает S в нек. точке $p = o + tv$, если $t \in F$ - корень обоих уравнений

$t^2 q_1(v) + 2t l_1(v) = 0$, $t^2 q_2(v) + 2t l_2(v) = 0$

(один из этих корней $t_0 = 0$, т.к. $o \in S$, второй t_1)

$t(t q_1(v) + 2l_1(v)) = 0$, $t(t q_2(v) + 2l_2(v)) = 0$.

Если $q_1(v) q_2(v) \neq 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{2l_1(v)}{q_1(v)} = -\frac{2l_2(v)}{q_2(v)}$, т.е.

$\frac{l_1(v)}{q_1(v)} = \frac{l_2(v)}{q_2(v)} \underset{q_1(v)q_2(v) \neq 0}{\Leftrightarrow} l_1(v) q_2(v) = l_2(v) q_1(v) \,/\cdot q_1(v) q_2(v) \Rightarrow$

$l_1(v) q_1(v) q_2^2(v) = l_2(v) q_1^2(v) q_2(v)$ - верно $\forall v \in V$ (даже если $q_1(v) = 0$ или $q_2(v) = 0$) - равенство двух многочленов от $x_1, \dots, x_n$ как функций.

Т.к. F бесконечно, то это равносильно равенству многочленов как алг. выражений.

$l_1 q_1 q_2^2 = l_2 q_1^2 q_2$ как алг. выражений.

Кольцо многочленов над полем не имеет делителей 0

$\Rightarrow$ можно сократить последнее равенство на $q_1 q_2$ (как равенство многочленов)

$\Rightarrow q_1 l_2 = q_2 l_1$ $(*)$

Нам достаточно д-ть, что $\exists \lambda \neq 0: l_2 = \lambda l_1$, из $(*) \Rightarrow q_2 = \lambda q_1$

Допустим, что l_1 и l_2 не пропорциональны, тогда они линейно независимы в пр-ве V^* и их можно включить в дуальный базис, т.е. выбрать базис в V так, чтобы

$l_1(v) = x_1$, $l_2(v) = x_2$, $\forall v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, тогда рав. $(*)$ примет вид: $q_1(x) x_2 = q_2(x) x_1$ $(x = (x_1, \dots, x_n))$

равенство двух многочленов, многочлен в правой части делится на $x_1 \Rightarrow$ многочлен

$q_1(x) x_2 \vdots x_1$, x_1 и x_2 вз. просты $\Rightarrow q_1(x) \vdots x_1$

$\Rightarrow q_1(v) = l(v) x_1 \Rightarrow q_2(v) = l(v) x_2$, $l(v) = l(x)$ - линейная форма,

$l \neq 0 \Rightarrow Q_1(o+v) = (l(x) + 2) x_1$, $Q_2(o+v) = (l(x) + 2) x_2$

Пусть $x_1 = 0 \Rightarrow Q_1(o+v) = 0$, т.е. S содержит плоскость $x_1 = 0$.

Но $Q_2(o+v) = (l(x) + 2) x_2 \neq 0$ при $x_1 = 0$ - противоречие.

$\Rightarrow l_2 = \lambda l_1$, $\lambda \neq 0 \Rightarrow q_2 = \lambda q_1 \Rightarrow Q_2 = \lambda Q_1$, ч.т.д.

<u>Анонс: классификация квадрик.</u>