Изменение координат тензора типа (p,q) при замене базиса

Пусть $e' = e\cdot C$ — новый базис в V, $C = C_{e\to e'}$ — матрица перехода. В индексах можно записать

$$e'_{i'} = e_i c^i_{i'}.$$

Обозначим также $\mathcal{D} = C^{-1}$.

Координаты вектора v_k преобразуются по формуле

(1) $x_k^{i_k} = c^{i_k}_{i'_k} x'^{i'_k}$ (индексы со штрихами нумеруют новые координаты)

Для линейных функций имеем $y^l_{j'_l} = c^{j_l}_{j'_l} y^l_{j_l}$, или, обращая матрицу C, $y^l_{j_l} = c^{j'_l}_{j_l} y'^l_{j'_l}$ (2)

Подставим выражения (1) и (2) в выражение

$$f(x_1,\dots,x_p;u^1,\dots,u^q) = T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} x_1^{i_1}\cdots x_p^{i_p}\, y^1_{j_1}\cdots y^q_{j_q} \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}$$

$$= \underbrace{\left(T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} c^{i_1}_{i'_1}\cdots c^{i_p}_{i'_p}\, d^{j'_1}_{j_1}\cdots d^{j'_q}_{j_q}\right)}_{\parallel\; T^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}} x'^{i'_1}_1\cdots x'^{i'_p}_p\, y^1_{j'_1}\cdots y^q_{j'_q} \qquad (3)$$

$\Rightarrow$

Эта формула показывает, что матрица C участвует p раз, а $\mathcal{D} = C^{-1}$ — q-раз, что согласуется с тем, что тензор p раз ковариантный и q раз контравариантный.

Отождествление тензоров малых валентностей с геометрическими объектами.

Теорема. 1) $T^1_0(V) = V^{**} \cong V$ (известный изоморфизм).

2) $T^0_1(V) = V^*$ (по определению).

3) $T^0_2(V)$ — билинейные функции.

4) $T^1_1(V) \cong L(V)$ — пространство линейных операторов на V.

Доказательство требуется только для T^1_1.

Пусть $f(v,u)$ — тензор типа $(1,1)$, $v \in V \cong V^{**}$, $u \in V^*$.

Напомним, что изоморфизм между V и V^{**} задается правилом $v \mapsto \varepsilon_v$, $\varepsilon_v(u) = u(v)$. Обратное отображение обозначим так: $\forall \ell \in V^{**}$, $\ell \to y_\ell \in V$.

Заметим, что при фиксированном v ф-я $f(v,u)$ — линейная ф-я на V^*, $f(v,u) = \varepsilon_v(u) = u(y_v)$ ($y_v \in V$, обозначение v для y введено, т.к. в данном случае вектору v соответствую вектору v)

Соответствие $v \xmapsto{\varphi} y_v$ является линейным оператором $\varphi: V \to V$. В самом деле,

$$f(v_1+v_2,u) = f(v_1,u) + f(v_2,u) = u(y_{v_1}) + u(y_{v_2}) = u(y_{v_1} + y_{v_2}) \Rightarrow$$

$$\varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2).$$

Также можно проверить для λv.

Чтобы убедиться, что это изоморфизм, дост. проверить эпиморфизм (т.к. размерности $= n^2$), если $\varphi: V \to V$ — линейный оператор, $f(v,u) := u(\varphi(v))$ — билинейная ф-я

$$f: V \times V^* \to F,$$ ч.т.д.

§2. Свёртка. Симметризация и альтернирование

В качестве наводящих соображений рассмотрим примеры.

1. След матрицы линейного оператора. $A = (a^i_j)$ — матрица линейного оператора, в некотором базисе, т.е. тензора типа $(1,1)$, $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^n a^i_i = a^i_i$, по правилу Эйнштейна. Как известно, след не зависит от выбора базиса. Это можно проверить в тензорных обозначениях: $a'^{i'}_{j'} = d^{i'}_i a^i_j c^j_{j'}$, тогда $\operatorname{tr} A' = (\sum_{i'}) a'^{i'}_{i'} = d^{i'}_i a^i_i c^i_{i'} =$

$$= \underbrace{d^{i'}_i c^i_{i'}}_{=1} a^i_i = a^i_i.$$

Это значит, что след — инвариант, т.е. тензор типа $(0,0)$.

2. Образ вектора x в матричном виде $Y = A\cdot X$.

$A = (a^i_j)$ (скобки можно не писать), $X = (x^k)$

Тензор $A \otimes X = a^i_j x^k$ имеет тип $(1,2)$.

Теперь $y^i = (A\cdot X)^i = a^i_j x^j$ — вектор, т.е. тензор типа $(0,1)$.

3. Произведение матриц $A\cdot B$. $A = a^i_j$, $B = b^k_l$.

Сначала $A \otimes B = a^i_j b^k_l$ — тензор типа $(2,2)$, теперь

$C = A\cdot B = a^i_j b^j_l \equiv c^i_l$ — матрица, т.е. тензор типа $(1,1)$

Общий случай: $f = f(v_1,\dots,v_p;u^1,\dots,u^q) \in T^q_p(V)$, $p,q \geq 1$.

Определение. Свёртка тензора f по r-му верхнему индексу и s-му нижнему индексу $(1 \le r \le q,\ 1 \le s \le p)$ — это

$$\bar f(v_1,\dots,\hat v_s,\dots,v_p;u^1,\dots,\hat u^r,\dots,u^q) := \left(\sum_{k=1}^n\right) f(v_1,\dots,\underbrace{e_k}_{s},\dots,v_p;u^1,\dots,\underbrace{e^k}_{r},\dots,u^q)$$

(e_k и e^k имеют одинаковые номера, знак суммы можно не писать)

(крышка над переменной — „шапка-невидимка“ — означает, что $\hat v_s$ и $\hat u^r$ там нет). Используется также обозн. $\bar f = \operatorname{tr}^r_s(f)$

Утверждение. Отображение $f \longmapsto \bar f$ — линейное отображение $\operatorname{tr}^r_s: T^q_p(V) \to T^{q-1}_{p-1}(V)$, причём

$$\bar T^{j_1,\dots,\hat j_r,\dots,j_q}_{i_1,\dots,\hat i_s,\dots,i_p} = T^{j_1,\dots,k,\dots,j_q}_{i_1,\dots,k,\dots,i_p}$$

Док-во. Очевидно, $\bar f(v_1,\dots,\hat v_s,\dots,v_p;u^1,\dots,\hat u^r,\dots,u^q)$ — полилинейная функция от $v_1,\dots,v_{s-1},v_{s+1},\dots,v_p;u^1,\dots,u^{r-1},u^{r+1},\dots,u^q$, т.е. тензор типа $(p-1,q-1)$. Линейность отображения tr^r_s явна из определения. Наконец, по смыслу координат,

$$\bar T^{j_1,\dots,\hat j_r,\dots,j_q}_{i_1,\dots,\hat i_s,\dots,i_p} = \bar f(e_{i_1},\dots,\hat e_{i_s},\dots,e_{i_p};e^{j_1},\dots,e^{j_r},\dots,e^{j_q}) = f(e_{i_1},\dots,\underbrace{e_k}_{s},\dots,e_{i_p};e^{j_1},\dots,\underbrace{e^k}_{r},\dots,e^{j_q}) =$$

$$= T^{j_1,\dots,k,\dots,j_q}_{i_1,\dots,k,\dots,i_p},$$ ч.т.д.

Замечание. Если $p = q$, можно сделать свёртки по всем парам индексов (при какой-либо разбивке на пары) и получить тензор типа $(0,0)$, т.е. инвариант. Его естественно называть полной свёрткой этого тензора.