Дале будем рассматривать только „чистые" тензоры типов $(p,0)$ или $(0,q)$.

Симметрические и кососимметрические тензоры

Опр.1. Тензор $f \in T_p^0(V)$ называется симметрическим (или симметричным), если для любой подстановки $\sigma \in S_p$, $f(v_1,\dots,v_p) = f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})$, $\forall (v_1,\dots,v_p) \in V^p$

Аналогично определяется симметричный тензор $g \in T_0^q(V)$: $g(u^1,\dots,u^q) = g(u^{\pi(1)},\dots,u^{\pi(q)})$, $\forall \pi \in S_q$

Обозначения: $T_p^+(V)$ – мн-во симметричных тензоров типа $(p,0)$, $T_+^q(V)$ – мн-во симметричных тензоров типа $(0,q)$.

Утв.1. $T_p^+(V)$, $T_+^q(V)$ – векторные подпространства (очевидно)

Вопрос о размерности пока отложим.

Опр.2. Тензор $f \in T_p^0(V)$ называется кососимметрическим, если $\forall \sigma \in S_p$, $\forall (v_1,\dots,v_p) \in V^p$:

$$f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}) = \operatorname{sign}(\pi) f(v_1,\dots,v_p)$$

(напомним, что $\operatorname{char} F \neq 2$)

Утв.2. Мн-во кососимм. тензоров типа $(p,0)$ (обозначается $\Lambda^p(V^*)$) – подпространство в $T_p^0(V)$, типа $(0,q)$ (обозначается $\Lambda^q(V)$) – подпространство в $T_0^q(V)$.

Заметим, что $T_2^0(V) = T_2^+(V) \oplus \Lambda^2(V^*)$.

Позже мы увидим, что аналогичное разложение при $p>2$ не имеет места.

Из любого тензора можно изготовить симметричный и кососимметричный. Считаем, что $\operatorname{char} F = 0$

Снова ограничимся $T_p^0(V)$. Введем две операции:

1) Симметризация:
$$(\operatorname{Sym} f)(v_1,\dots,v_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}) \quad (1)$$

2) Альтернирование:
$$(\operatorname{Alt} f)(v_1,\dots,v_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sign}(\sigma) f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}) \quad (2)$$

Очевидно, $\operatorname{Sym} f$ – симметричный тензор, $\operatorname{Alt} f$ – кососимметричный тензор.

Отметим свойства операций Sym и Alt.

Утв.1. Sym – линейный оператор на $T_p^0(V)$. Причем:
1. $\operatorname{Sym}^2 = \operatorname{Sym}$. 2. $\operatorname{Im}\operatorname{Sym} = T_p^+(V)$

Утв.2. Alt – лин. оператор на $T_p^0(V)$, причём:
1. $\operatorname{Alt}^2 = \operatorname{Alt}$. 2. $\operatorname{Im}\operatorname{Alt} = \Lambda^p(V^*)$.
3. $\operatorname{Alt}\circ\operatorname{Sym} = \operatorname{Sym}\circ\operatorname{Alt} = 0$

Утв.1 и 2. (1 и 2) доказываются одинаково.

Докажем утв.2. Пусть $g = \operatorname{Alt} f$.

Тогда $\forall \pi \in S_p$, $g(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(p)}) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \operatorname{sign}(\sigma) f(v_{\sigma\pi(1)},\dots,v_{\sigma\pi(p)})$

Переобозначим $\tau = \pi\sigma$, $\operatorname{sign}(\tau) = \operatorname{sign}(\pi)\operatorname{sign}(\sigma)$

Тогда $g(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(p)}) = \frac{1}{p!}\operatorname{sign}(\pi)\sum_{\tau\in S_p} \operatorname{sign}(\tau) f(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(p)}) = \operatorname{sign}(\pi)\, g(v_1,\dots,v_p)$, т.е. g – кососимметрический. Теперь

$$\operatorname{Alt} g(v_1,\dots,v_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\delta\in S_p}\operatorname{sign}(\delta)\, g(v_{\delta(1)},\dots,v_{\delta(p)}) = \frac{1}{p!}\sum_{\delta\in S_p}\operatorname{sign}(\delta)^2 g(v_1,\dots,v_p) = g(v_1,\dots,v_p) = \operatorname{Alt} f(v_1,\dots,v_p),$$

доказали (1).

2. По п.1, $\operatorname{Im}\operatorname{Alt} \subseteq \Lambda^p(V^*)$

При этом для любого $g \in \Lambda^p(V^*)$ $\exists f \in T_p^0$:

$g = \operatorname{Alt} f = \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt} f) \overset{\text{по п.1.}}{=} \operatorname{Alt} g \Rightarrow$

$\operatorname{Im}\operatorname{Alt} = \Lambda^p(V^*)$.

3. Пусть $f \in T_p^0(V)$, тогда $\operatorname{Alt} f = g \in T^p(V)$.

Поэтому $\operatorname{Sym} g = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} g(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}) =$

$= \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\operatorname{sign}(\sigma)\, g(v_1,\dots,v_p) = 0$, так как количества четных и нечётных подстановок одинаковы. Аналогично, $\operatorname{Alt}(\operatorname{Sym} f) = 0$.

§3. Тензорная алгебра.

Ранее вводилось понятие внешней прямой суммы конечного числа векторных пространств.

На этот раз рассмотрим векторные пространства

$$T(V) = T_0^0(V) \oplus T_0^1(V) \oplus \ldots \equiv \bigoplus_{q=0}^{\infty} T_0^q(V)$$

и
$$T(V^*) = T_0^0(V) \oplus T_1^0(V) \oplus \ldots = \bigoplus_{p=0} T_p^0(V)$$

Эти прямые суммы можно понимать как финитные последовательности $(f_0, f_1, \dots, \dots)$, где $f_p \in T_p^0(V)$ (сравните с определением многочленов)

Операция $\otimes$ превращает эти пространства в ассоциативные алгебры. Можно отождествить последовательность f с суммой $f_0 + f_1 + \ldots + f_m$, последовательность g с суммой $g_0 + g_1 + \ldots + g_m$,

Тогда $f \cdot g := \sum_{i,j} f_i \otimes g_j$

При этом если $f \in T_{p_1}^0$, $g \in T_{p_2}^0$, то $f \otimes g \in T_{p_1+p_2}^0$

Такая алгебра называется градуированной.