Внешняя алгебра (алгебра Грассмана)

Пространство кососимметрических тензоров типа $(0,q)$ $\Lambda^q(V)$ ещё называют пространством q-векторов

Можно построить (внешнюю) прямую сумму пространств $\Lambda^q(V)$: $\Lambda(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \Lambda^q(V)$

(при этом действует соглашение, что $\Lambda^0(V)=F$)

Оно не является подалгеброй в $T(V)$, если использовать операцию обычного тензорного умножения.

Определим так называемую операцию внешнего умножения $\wedge$

Опр. Если $f\in T^r_0$, $g\in T^s_0$, то $f\wedge g := \mathrm{Alt}(f\otimes g)$

Если $f\in\Lambda^r(V)$, $g\in\Lambda^s(V)$, то $f\wedge g\in\Lambda^{r+s}(V)$

В общем случае $(\sum_{i\geq 0} f_i)\wedge(\sum_{j\geq 0} g_j) := \sum_{i,j\geq 0}(f_i\wedge g_j)$.

Утверждение. Операция $\wedge$ ассоциативна и „супер-антикоммутативна": если $f\in\Lambda^r$, $g\in\Lambda^s$, то $g\wedge f=(-1)^{rs}(f\wedge g)$

Теорема. Если $e=\{e_1,\dots,e_n\}$ – базис V, то

$\{e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_q} \mid 1\leq i_1<i_2<\dots<i_q\leq n\}$ – базис пространства $\Lambda^q(V)$. $\dim\Lambda^q(V)=C_n^q$ $(0\leq q\leq n)$,

$\Lambda^q(V)=0$ при $q>n$.

Следствие. $\dim\Lambda(V)=2^n$, где $n=\dim V$.

Термин. Алгебра $\Lambda(V)$ – внешняя алгебра пространства V, или алгебра Грассмана.

Симметрическая алгебра

Для разнообразия будем рассматривать пространства $T_p^0(V)$ и их подпространства $T_p^+(V)$ симметрических форм степени p.

Обозначим $S(V)=\bigoplus_{p=0}^{\infty} T_p^+(V)$

Опять-таки, это пр-во не является алгеброй относительно $\otimes$. Введём симметрическое произведение $\vee$.

Для тензоров $f\in T_p^0(V)$, $g\in T_r^0(V)$ опр.

$f\wedge g=\mathrm{Sym}(f\otimes g)$.

При этом если $f\in T_p^+$, $g\in T_r^+$, то $f\vee g\in T^+_{p+r}(V)$

Можно показать, что эта операция ассоциативна и коммутативна. В общем случае

$(\sum_{i\geq 0} f_i)\vee(\sum_{j\geq 0} g_j) := \sum_{i,j\geq 0} f_i\vee g_j$

Можно доказать, что базис в пространстве $T_p^+(V)$ образуют тензоры $e_{i_1}\vee\dots\vee e_{i_p}$ $(1\leq i_1\leq i_2\leq\dots\leq i_p\leq n)$. Таким образом, можно условно записать любой тензор в виде

$f=\sum_{\sum k_i=p} a^{(k_1\dots k_p)} e_1^{k_1}\vee\dots\vee e_p^{k_p}$, его можно отождествить с однородным симметрическим многочленом степени p.

Поэтому $\dim T_p^+(V)$ = числу выборок размера p из $\{1,\dots,n\}$ с повторениями, т.е. $\overline{C}_n^p = C_{n+p-1}^p$.