К лекции 24.05.24

Тензоры на евклидовом пространстве

Пусть $\mathcal{E}$ – евклидово пространство, $e=(e_1,\dots,e_n)$ – некоторый базис в $\mathcal{E}$, $G=(g_{ij})$ – матрица Грама, тогда скалярное произведение $(x,y)=X^TGY$, в индексах (с учетом правила Эйнштейна)

$$(x,y)=g_{ij}x^iy^j,\quad g_{ij}=g_{ji}$$

– ковариантный симметрический тензор, называемый метрическим тензором. (Конечно, матрица G положительно определённая).

Обозначим $G^{-1}=(g^{kl})$ – это будет контравариантный метрический тензор.

Равенство $G\cdot G^{-1}=E$ имеет вид $g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j$, а

$$G^{-1}G=E \text{ — } g^{ik}g_{kj}=\delta^i_j.$$

С помощью метрического тензора можно установить явный изоморфизм между $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$.

А именно, свёртка $g_{ij}x^i:=a_j$ будет тензором типа $(1,0)$, т.е. линейной формой. Видим, что верхний индекс i переместился вниз.

Наоборот, тензор a_j можно свернуть с контравариантным метрическим тензором: $x^i=g^{ij}a_j$, x^i – тензор типа $(0,1)$, т.е. вектор.

В общем случае определены операции опускания и подъёма индекса.

Пусть f – тензор типа (p,q), с координатами $T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}$, причём $q\geqslant 1$. Выберем какое-либо $k\in[1,q]$ и l между 1 и p и рассмотрим свёртку

$$\tilde{T}^{j_1,\dots,\hat{j_k},\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_l,\dots,i_p}=g_{i_lj}T^{j_1,\dots,j,\dots,j_q}_{i_1,\dots,\square,\dots,i_p}\in T^{q-1}_{p+1}$$

Говорят, что тензор $\tilde{f}$ получен из тензора f опусканием k-го индекса в позицию l.

Наоборот, если

$$f\in T^q_p(\mathcal{E}),\text{ причём } p\geqslant 1,\text{ то}$$

можно выбрать один нижний индекс i_l и свернуть с g^{ij}:

$$\tilde{T}^{j_1,\dots,\underset{k}{j},\dots,j_q}_{i_1,\dots,\hat{i_l},\dots,i_p}=g^{ij}T^{j_1,\dots,j_q}_{\underbrace{i_1,\dots,i,\dots,i_p}_{l}}\in T^{q+1}_{p-1}(\mathcal{E}).$$

Тензор $\tilde{f}$ с матрицей $\tilde{T}$ получен из тензора f подъёмом l-го нижнего индекса в позицию k.

Коммутирующие операторы

Теорема. Любое семейство $\{\varphi_i\mid i\in I\}$ попарно коммутирующих операторов в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем (например, $\mathbb{C}$) имеет общий собственный вектор.

Доказательство. Если все операторы скалярные (в частности, при $n=1$), то любой $\neq 0$ вектор – собственный для всех. В общем случае применим индукцию по $n=\dim V$. Пусть φ_{i_0} – нескалярный оператор, λ_0 – его собственное значение. Тогда V_{λ_0} – собств. подпр-во для φ_{i_0} имеет размерность $<n$. Оно инвариантно для всех φ_i: $\forall v\in V_{\lambda_0}$, $\varphi_{i_0}(\varphi_i(v))=$ $=\varphi_i(\varphi_{i_0}(v))=\lambda_0\varphi_i(v)\Rightarrow\varphi_i(v)\in V_{\lambda_0}$.

По предположению индукции, $\exists v_1\in V_{\lambda_0}$ – общий собств. вектор для φ_i, $\forall i\in I$. ч.т.д.

Канонический вид кососимметрической билинейной формы

Пусть $\operatorname{char}F\neq 2$, $\beta(x,y)=-\beta(y,x)$, $\forall x,y\in V$, β – билинейная функция. В любом базисе $B^T=-B$.

Ядро β опр. как $\operatorname{Ker}\beta=\{x\in V\mid\beta(v,x)=0,\ \forall v\in V\}$

Форма называется невырожденной, если $\operatorname{Ker}\beta=0$.

Ядро задаётся системой лин. уравнений

$$\beta(e_i,x)=0,\quad i=1,\dots,n.$$

Она имеет только нулевое решение $\Leftrightarrow\det B\neq 0$.

Т.к. $B^T=-B$, то $|B|=(-1)^n|B|$. Если n нечётное, то $|B|=0$. Значит, невырожденная кососимм. б.-ф. существует только на пространстве размерности $n=2m$.

Теорема. Для любой невырожденной кососимм. б.ф. $\beta(x,y)$ существует базис $e_1',e_2',\dots,e_{2m-1}',e_{2m}'$, в котором

$$B'=\begin{pmatrix}\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}&&&0\\&\boxed{\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}}&&\\&&\ddots&\\0&&&\boxed{\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}}\end{pmatrix}$$

(блочно-диагональная матрица, состоящая из m диагональных блоков $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$)

Доказательство. Т.к. $\beta\neq 0$, то $\exists$ векторы e_1,e_2 такие, что $\beta(e_1,e_2)\neq 0$. Если $\beta(e_1,e_2)=b_{12}$, то $\beta(e_1,\frac{1}{b_{12}}e_2)=1$, значит, $\beta(e_1',e_2')=1=-\beta(e_2',e_1')$, $e_1'=e_1$, $e_2'=\frac{e_2}{b_{12}}$.

Пусть $U_1=\langle e_1',e_2'\rangle$; рассм. $W=U_1^{\perp}=\{y\in V\mid\beta(x,y)=0,\forall x\in U_1\}$

W задается системой уравнений

$$\beta(e_1',y)=0,\quad\beta(e_2',y)=0\Rightarrow\dim W=n-2=2m-2.$$

Кроме того, $U\cap W=0$, т.к. $U\cap W\subseteq\operatorname{Ker}f=0\Rightarrow$

$$V=U\oplus W.$$

По предпол. индукции, в W существует базис $e_3',\dots,e_{2m}'$, в котором матрица ограничения $\beta|_W$ имеет блочный вид $\begin{pmatrix}\square&&0\\&\square&\\0&&\ddots\ \square\end{pmatrix}$ с $(m-1)$ блоками $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

Тогда в базисе $e_1',e_2',\dots,e_{2m}'$ B' имеет требуемый вид.

Добавление. Множество линейных обратимых операторов φ в $2m$-мерном векторном пространстве, сохраняющих невырожденную кососимм. б.ф.: $\beta(\varphi(x),\varphi(y))=\beta(x,y)$, является группой. Она называется симплектической группой $Sp(V)$, соответствующая группа матриц обозначается $Sp_{2m}(F)$.