Действия групп, орбиты, стабилизаторы, классы сопряжённости.

Определение 1. Действием группы G на множестве X называется отображение $\alpha\colon G \times X \to X$ со свойствами:
1) $\alpha(e, x) = x$;
2) $\alpha(h, \alpha(g, x)) = \alpha(hg, x)$.
Обозначение $\alpha(g, x) = g \cdot x$.

Определение 2. Орбита элемента x при действии группы G – это $\{g \cdot x \mid g \in G\}$.
Стабилизатор точки x – это $\mathrm{St}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Задача 1. Докажите, что $\mathrm{St}(x)$ – подгруппа в G.

Задача 2. Пусть $\mathrm{St}(x) = H$, чему равен $\mathrm{St}(g \cdot x)$?

Задача 3. Пусть G – группа операторов, действующая на векторном пространстве умножениями. Найти орбиты, выбрать представители и найти их стабилизаторы.
а) $G = \mathrm{GL}_n$;
б) $G = O_n$ – группа ортогональных матрицж
в) группа невырожденных диагональных матриц
г) группа невырожденных верхнетреугольных матриц

Задача 4. Пусть $G = GL_n$ найти орбиты при действии на множестве k-мерных подпространств в n-мерном пространстве.

Задача 5. Пусть F – множество всех цепочек $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$, где $dim V_i = i$. Найти орбиты действия GL_n на F стабилизаторы представителей.

Задача 6. Описать орбиты действия $GL_n(\mathbb{C}$ на комплексных матрицах $n \times n$ сопряжениями.

Определение 3. Классы сопряжённости – это орбиты при действии группы на себе сопряжениями.

Задача 7. Описать классы сопряжённости и найти все нормальные подгруппы в
а) S_4,
б) A_4,
в) Q_8,
д) D_6.

Задача 8. Пусть G – группа аффинных преобразований в n-мерном пространстве. $g \cdot f(x) = f(g^{-1}x)$ – ействие на множестве квадратичных функций. Доказать, что это действие и найти орбиты.