1 курс, осень 2015

Листок 1

Определители малых порядков; метод Гаусса

Задача 1. Найдите решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} ax + by & = e, \\ cx + dy & = d, \end{cases}$$

в зависимости от чисел a, b, c, d, e, f.

Задача 2. При каких константах предыдущая система имеет решение?

Задача 3. На двумерной координатной плоскости задан параллелограмм, одна из вершин которого находится в точке $(0, 0)$, две соседние — в точках (a, b) и (c, d). Найдите площадь этого параллелограмма.

Определение 1. Для квадратной таблицы (*матрицы*)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

определителем этой матрицы называется число $ad - bc$.

Задача 4. Найдите определители матриц

а) $\begin{pmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix}$.

Задача 5. Найдите решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = b_3, \end{cases}$$

если это решение существует.

Определение 2. Для квадратной таблицы (матрицы) 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ее *определителем* называется число

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Задача 6. Надите определители матриц

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Докажите, что если в матрице поменять местами две строки или два столбца, то определитель поменяет знак.

Задача 8. Докажите, что если в матрице одну строки (один столбец) умножить на число, то и определитель умножится на это число.

Задача 9. Докажите, что если матрицы A и B таковы, что все строки, кроме k-й, у них одинаковы, а матрица C имеет те же строки, что A и B везде, кроме k-й, а k-ая строка равна сумме k-ых строк матриц A и B, то определитель матрицы C равен сумме определителей матриц A и B (свойство аддитивности определителя). То же свойство выполняется для столбцов.

Задача 10 (Аксиоматическое задание определителя). Пусть функция $f(a, b, c, d)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $f(1, 0, 0, 1) = 1$;

2) $f(\lambda a, \lambda b, c, d) = \lambda f(a, b, c, d)$, $f(a, b, \lambda c, \lambda d) = \lambda f(a, b, c, d)$, $f(\lambda a, b, \lambda c, d) = \lambda f(a, b, c, d)$, $f(a, \lambda b, c, \lambda d) = \lambda f(a, b, c, d)$;

3) $f(c, d, a, b) = -f(a, b, c, d)$, $f(b, a, d, c) = -f(a, b, c, d)$;

4) $f(a_1+a_2, b_1+b_2, c, d) = f(a_1, b_1, c, d)+f(a_2, b_2, c, d)$, $f(a_1+a_2, b, c_1+c_2, d) = f(a_1, b, c_1, d)+f(a_2, b, c_2, d)$.

Докажите, что в этом случае $f(a, b, c, d) = ad - bc$.

Задача 11. Сформулируйте и докажите задачу, аналогичную предыдущей, для определителей 3×3.

Задача 12. Как изменится определитель матрицы 2×2 или 3×3, если у всех элементов изменить знак на противоположный?

Определение 3. Для линейной системы общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

числа b_i называются *свободными членами.* Система называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю. Система называется *однородной системой, ассоциированной с системой* $(*)$, если заменить столбец свободных членов на нули.

Прямоугольная таблица коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей* (a_{ij}). Ее *главная диагональ* — это последовательность $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Расширенная матрица системы линейных уравнений $(*)$ получается из (a_{ij}) добавлением справа столбца свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Если каждое из уравнений системы $(*)$ обращается в тождество после замены неизвестных x_i числами x_i^0, то n-ка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ называется *решением* системы $(*)$. Система, не имеющая решений, называется *несовместной.* Если у системы есть решения, то она называется *совместной.* Если решение единственно, то система называется *определенной.*

Определение 4. Пусть помимо системы $(*)$ дана также система

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n & = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n & = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n & = b'_n \end{cases} \qquad (*')$$

Будем говорить, что система $*'$ получена из $*$ при помощи элементарных преобразований первого типа, если в системе $*'$ все уравнений, кроме i-го и k-го, остались прежними, а i-е и k-е поменялись местами.

Если же в системе $*'$ все уравнения, кроме i-го, те же, что и в $*$, а i-е уравнение имеет вид

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})x_n = b_i + cb_k,$$

то назовем это преобразованием второго типа.

Определение 5. Две линейные системы называются *эквивалентными*, если они обе либо несовместны, либо имеют одно и то же множество решений.

Задача 13. Докажите, что системы, получающиеся друг из друга элементарными преобразованиями (любого типа), эквивалентны.

Задача 14 (Метод Гаусса). Докажите, что существует алгоритм, приводящий систему $*$ к *ступенчатой* системе

$$\begin{cases} \bar a_{11}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \bar a_{1n}x_n & = \bar b_1 \\ \qquad \bar a_{2k}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \bar a_{2n}x_n & = \bar b_2 \\ \qquad\qquad \bar a_{3l}x_3 + \ldots\ldots\ldots + \bar a_{3n}x_n & = \bar b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \bar a_{rs}x_s + \ldots + \bar a_{rn}x_n & = \bar b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = \bar b_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots & \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = \bar b_m \end{cases}$$

где $\bar a_{11}\bar a_{2k}\ldots\bar a_{rs} \neq 0$.

Задача 15. Исследуйте на наличие решений и найдите решения (если они есть) ступенчатой системы из предыдущей задачи.

Задача 16. Найдите решения систем линейных уравнений методом Гаусса (см. задачник Кострикина, задачи 8.1, 8.2, 8.4).