

Задача 1. * Существуют ли две неизоморфные конечные группы, у которых для каждого $k \in \mathbb{N}$ одинаковое количество элементов порядка k ?

Задача 2. * Изоморфны ли группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ и $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$?

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА. НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ. ФАКТОР-ГРУППЫ.

Определение 1. Центр группы G – это множество элементов, коммутирующих со всеми. $Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in G : zg = gz\}$.

Задача 3. Докажите, что $Z(G)$ – подгруппа.

Задача 4. Найдите центр группы

- а) D_n
- б) Q_8
- в) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Задача 5. Докажите, что подгруппа, индекс которой – минимальный простой делитель порядка $|G|$ нормальна.

Задача 6. * Докажите теорему Коши. Пусть G – конечная группа. И пусть p – простой делитель порядка G . Тогда в G есть подгруппа порядка p .

Задача 7. * Приведите пример того, что предыдущая задача не верна, если p не простое.

Задача 8. Опишите смежные классы \mathbb{Z} по $n\mathbb{Z}$, найдите факторгруппу $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Задача 9. Опишите левые и правые смежные классы группы S_3 по подгруппе $\langle(1, 2)\rangle$.

Задача 10. Докажите, что подгруппа A_n нормальна в S_n . Опишите смежные классы S_n по A_n , найдите факторгруппу S_n/A_n .

Задача 11. Докажите, что подгруппа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ нормальна в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Опишите смежные классы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ по $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, найдите факторгруппу.

Задача 12. Докажите, что подгруппа V_4 нормальна в S_4 . Найдите факторгруппу S_4/V_4 .

Задача 13. Докажите, что подгруппа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали нормальна в группе верхнетреугольных матриц. Найдите факторгруппу.

Задача 14. Найдите факторгруппу $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0}$.

Задача 15. Найдите факторгруппу $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$.

Задача 16. Пусть $G = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det A^6 = 1\}$. Найдите факторгруппу $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/G$.

Задача 17. Пусть H_n – множество комплексных чисел с аргументами $\frac{2\pi k}{n}$. Найдите факторгруппу H_{12}/H_4 .

Задача 18. Приведите пример подгрупп $A \subset B \subset C$ таких, что A нормальна в B , B нормальна в C , но A не нормальна в C .

Задача 19. * Пусть H – подгруппа индекса k в группе G . Докажите, что существует нормальная подгруппа $G \triangleright N$ такая, что $N \subset H$ и индекс N в G не превосходит $k!$.