

Листок 4. КЛАССЫ СОПРЯЖЕННОСТИ.

Задача 1. Опишите классы сопряженности в

- а) S_n
- б) Q_8
- в) D_n

Задача 2. а) Пусть $H \subset G$ – подгруппа индекса 2, и $C \subset H$ – класс G -сопряженности. Докажите, что C – либо один класс H -сопряженности, либо объединение двух классов H -сопряженности одинаковой мощности.

б) Пусть $H \subset G$ – нормальная подгруппа индекса k , и $C \subset H$ – класс G -сопряженности. Докажите, что C – объединение d классов H -сопряженности одинаковой мощности, где d – делитель k .

Задача 3. Опишите классы сопряженности в

- а) A_4 ,
- б) A_n .

Задача 4. Найдите все нормальные подгруппы в

- а) S_4
- б) Q_8
- в) D_5
- г) D_6
- д) A_4

Задача 5. Докажите, что группа A_5 простая, то есть там нет нетривиальных нормальных подгрупп.

Задача 6. Докажите, что центр группы из p^n элементов, где p – простое число, содержит более одного элемента.

Задача 7. Докажите, что группа порядка p^2 коммутативна.

Задача 8. Докажите, что группа автоморфизмов некоммутативной группы G не может быть циклической.

Задача 9. Пусть G – группа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали с элементами из \mathbb{Z}_p

- а) Докажите, что G – некоммутативная группа порядка p^3 ,
- б) Найдите центр G ,
- в) Опишите классы сопряженности в G .

Задача 10. * Докажите, что фактор-группа группы $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ по центру изоморфна S_4 .

Задача 11. * Найдите число классов сопряженности и число элементов в каждом классе для некоммутативной группы порядка p^3 .