1. Теорема о гомоморфизме и конечнопорожденные абелевы группы

Теорема 1. *(Теорема о гомоморфизме) Пусть G и H группы. Пусть существует гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$. Тогда* $\mathrm{Ker}\varphi$ *есть нормальная подгруппа в G,* $\mathrm{Im}\varphi$ *– подгруппа в H. Приччм* $G/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$.

Задача 1. а) Докажите, что подгруппа $\mathrm{Int}(G)$ внутренних автоморфизмов группы G является нормальной в группе $\mathrm{Aut}(X)$ всех автоморфизмов группы G.

б) Докажите, что $Z(G)$ – нормальная подгруппа в G. Докажите, что

$$G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G).$$

Задача 2. * Введите понятия аналогичные нормальной подгруппе и фактор-группе для полугрупп и сформулируйте (и докажите) аналог теоремы о гомоморфизме.

Задача 3. Пусть U – множество комплексных чисел с модулем 1, H_n – множество комплексных чисел с аргументами $\frac{2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $U_n = H_n \cap U$. Докажите, что

а) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong U$;
б) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times \cong U$;
в) $\mathbb{C}^\times/U \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$;
г) $U/U_n \cong U$;
д) $\mathbb{C}^\times/U_n \cong \mathbb{C}^\times$;
е) $\mathbb{C}^\times/H_n \cong U$;
ж) $H_n/(\mathbb{R}_+, \cdot) \cong U_n$;
з) $H_n/U_n \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$

Задача 4. Пусть $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $D = \{x \in G \mid \det x > 0\}$. Найти G/D.

Задача 5. * Докажите, что $S_4/V_4 \cong S_3$.

Теорема 2. *(Теорема о факторизации по сомножителям) Пусть $G_1, \ldots, G_n$ – группы и $H_1, \ldots, H_n$ – их нормальные подгруппы. Тогда $H_1 \times \ldots \times H_n$ – нормальная подгруппа в группе $G_1 \times \ldots \times G_n$ и*

$$(G_1 \times \ldots \times G_n)/(H_1 \times \ldots \times H_n) \cong G_1/H_1 \times \ldots \times G_n/H_n.$$

Задача 6. Пусть A – свободная абелева группа с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$, B – ее подгруппа, порожденная y_1, y_2, y_3. Найти, чему изоморфна группа A/B, если

а)

$$\begin{cases} y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3; \\ y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3. \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3; \\ y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3; \\ y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

г)

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3; \\ y_2 = 11x_1 + 8x_2 + 5x_3; \\ y_3 = 17x_1 + 5x_2 + 8x_3. \end{cases}$$

д)

$$\begin{cases} y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3; \\ y_2 = 8x_1 + 7x_2 + 11x_3; \\ y_3 = 6x_1 + 5x_2 + 11x_3. \end{cases}$$

е)

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 2y_1; \\ y_3 = 3y_1. \end{cases}$$

Задача 7. В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$ по подгруппе B, порождчнной $x_1 + x_2 + 4x_3$ и $2x_1 - x_2 + 2x_3$ найти порядок смежного класса $(x_1 + 2x_3) + B$.

Задача 8. В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$ по подгруппе B, порождчнной $2x_1 + x_2 - 50x_3$ и $4x_1 + 5x_2 + 60x_3$ найти порядок смежного класса $(32x_1 + 31x_2) + B$.