1. Прямые произведения. Конечнопорожденные абелевы группы

Задача 1. Разлагаются ли в прямые произведения следующие группы?
а) $\mathbb{Z}$
б) S_3
в) A_4
г) S_4
д) Q_8

Задача 2. Доказать, что $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ тогда и только тогда, когда $(m, n) = 1$.

Задача 3. Пусть $A_1 \ldots, A_k$ – подгруппы абелевой группы, имеющие конечные попарно взаимно простые порядки. Докажите, что их сумма является прямой.

Задача 4. Найти $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2)$.

Задача 5. а) Доказать, что подгруппа конечно порождчнной абелевой группы конечно порождена.
б) Верно ли это утверждение для коммутативных моноидов?
в) Верно ли это утверждение для некоммутативных групп?

Теорема 1. *Конечно порожденная абелева группа изоморфна конечной прямой сумме свободных циклических групп (изоморфных $\mathbb{Z}$) и конечных примарных циклических групп (изоморфных $\mathbb{Z}_{p^\alpha}$ для некоторого простого p). Причем такое разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.*

Задача 6. а) Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_6$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$?
б) Разбить на классы изоморфных групп $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{50}$, $\mathbb{Z}_{3600}$, $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{40}$, $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{30} \oplus \mathbb{Z}_{40}$.

Задача 7. а) Перечислить с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка 200.
б) Сколько с точностью до изоморфизма абелевых групп порядка n? (Не совсем хороший ответ, то есть не в элементарных функциях.)

Задача 8. Есть ли в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$?

Задача 9. Чему изоморфна группа $(\langle a\rangle_9 \oplus \langle b\rangle_{27})/\langle 3a + 9b\rangle$?

Задача 10. Изоморфны ли группы $(\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4)/\langle 2b\rangle$ и $(\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4)/\langle a + 2b\rangle$?

Задача 11. Сколько элементов
а) порядка 2, 4 и 6 в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$?
б) порядка 2,4 и 5 в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$?