

Коммутант, разрешимые группы.

Определение 1. Коммутатор элементов x и y из G – это $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Коммутант – это подгруппа, порождённая коммутаторами.

Задача 1. Доказать, что G' – нормальная подгруппа, фактор группа по которой абелева. Причём она минимальна среди подгрупп с этим свойством.

Задача 2. Найти коммутанты групп S_3, A_4, S_4, Q_8 .

Задача 3. Докажите, что коммутант группы GL_n равен SL_n .

Задача 4. Найти коммутант группы D_n .

Задача 5. Найти коммутант группы невырожденных верхнетреугольных матриц $n \times n$.

Задача 6. Доказать, что при сюръективном гомоморфизме $\varphi: G \rightarrow H$ выполнено $\varphi(G') = H'$.

Задача 7. Установить биекцию между гомоморфизмами группы в коммутативные группы и гомоморфизмами её фактора по коммутанту в те же группы.

Задача 8. Доказать, что коммутант нормальной подгруппы нормален во всей группе.

Определение 2. Группа G называется *разрешимой*, если ряд $G \supset G' \supset G'' \supset \dots$ приходит в группу $\{e\}$.

Задача 9. Доказать, что

- а) Всякая подгруппа разрешимой группы разрешима
- б) Факторгруппа разрешимой группы разрешима
- в) Прямое произведение разрешимых групп разрешимо
- г) Если $G/A \cong B$, группы A и B разрешимы, то и G разрешима.

Задача 10. Доказать разрешимость групп

- а) S_3
- б) A_4
- в) S_4
- г) Q_8
- д) D_n
- е) группы верхнетреугольных матриц.

Задача 11. Доказать, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда существует ряд нормальных подгрупп $G \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset \{e\}$, где факторгруппы G_i/G_{i+1} абелевы.