

Лекция 1. Линейные системы уравнений. Метод Гаусса.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

3 сентября, 2021

- В течение семестра лекции и семинары (до 20 декабря).
- Посередине семестра коллоквиум (конец октября – начало ноября).
- В конце семестра зачет (с 20 декабря) и экзамен (после Нового года).

Сайт кафедры высшей алгебры <http://halgebra.math.msu.su>

Раздел "Обязательные курсы"

Осень 2021. Наш поток.

Там будет:

- Организационная информация.
- Форма для вопросов/отзывов/замечаний.
- До лекции – краткий план на лекцию.
- Сразу после лекции – краткое описание тем лекции.
- Через 1-2 дня – видеозапись лекции, слайды и текстовый конспект.

- 1) А.И. Кострикин, "Введение в алгебу" часть 1, "Основы алгебры".
- 2) Э.Б. Винберг, "Курс алгебры"
- 3) "Сборник задач по алгебре" под редакцией А.И. Кострикина.

Пусть x_1, \dots, x_n – переменные.

Линейным алгебраическим уравнением от x_1, \dots, x_n называется уравнение вида

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b,$$

где a_1, \dots, a_n, b – числа.

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ или СЛУ) – это система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ называются коэффициентами системы, а числа b_1, \dots, b_m – правыми частями уравнений.

Определение

Решение системы – это упорядоченный набор чисел (x_1^0, \dots, x_n^0) , которые при подстановке в каждое уравнение системы обращают его в верное равенство.

Определение

1) СЛУ называется совместной, если существует хотя бы одно решение, и несовместной, если решений нет.

2) Совместная СЛУ называется определенной, если решение единственно, и неопределенной, если решений больше одного.

Простейшие примеры

- $\begin{cases} 2x = 4. \end{cases}$ совместная и определенная система
- $\begin{cases} 0x = 4. \end{cases}$ несовместная система.
- $\begin{cases} 0x = 0. \end{cases}$ совместная, но не определенная система.

Определение

Решить СЛУ – это описать все ее решения.

Что делать, если решений бесконечно много?

Пример

$\{ 2x + 3y = 4. \quad \text{Выразим одну переменную через другую:}$

$$x = \frac{4 - 3y}{2} = 2 - \frac{3}{2}y.$$

Ответ: y – любое, $x = 2 - \frac{3}{2}y$.

Матрица – это прямоугольная таблица, заполненная числами. На письме пишутся только эти числа (элементы матрицы) и вся матрица обводится либо в круглые скобки, либо в двойные прямые. Говорят, что матрица имеет размер $m \times n$, если у нее m строк и n столбцов.

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right\| \quad - \text{ это матрица } 2 \times 3.$$

Удобные обозначения:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элемент a_{ij} находится на пересечении i -ой строки и j -го столбца.

Если $m = n$, то матрица называется квадратной.

Квадратная матрица A называется диагональной, если $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Такая матрица обозначается $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Квадратная матрица A называется верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$.

Квадратная матрица A называется нижнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

С каждой СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

связаны две матрицы. Это матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и расширенная матрица коэффициентов

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

СЛУ называется однородной, если все правые части ее уравнений равны нулю. Однородная система всегда совместна, так как существует решение $(0, 0, \dots, 0)$.

Для любой системы с расширенной матрицей коэффициентов

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ можно рассмотреть}$$

ассоциированную однородную систему с расширенной

матрицей коэффициентов $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array} \right) .$

Определение

Две СЛАУ называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

План решения СЛУ методом Гаусса.

- 1) Ввести 3 типа элементарных преобразований СЛУ, которые переводят СЛУ в эквивалентную.
- 2) Привести элементарными преобразованиями систему к простому виду.
- 3) Решить получившуюся более простую систему.

Элементарные преобразования I типа.

Фиксируем произвольное число λ . Возьмем i -е уравнение нашей СЛАУ

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

и прибавим его, умноженное на λ , к j -му

$$a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j.$$

(Левую часть прибавим к левой, а правую – к правой.) Все уравнения, кроме j -го при этом не изменятся.

На j -ом месте получится уравнение

$$a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n + \lambda(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = b_j + \lambda b_i.$$

преобразуя, получаем

$$(a_{j1} + \lambda a_{i1})x_1 + \dots + (a_{jn} + \lambda a_{in})x_n = b_j + \lambda b_i.$$

Элементарные преобразования I типа.

С расширенной матрицей коэффициентов при этом происходит следующее (элементарное преобразование матрицы типа I): все строки, кроме j -ой не меняются, а к j -ой прибавляется i -я, умноженная на λ . (При умножении строки на λ умножается каждый ее элемент, а при сложении 2-х строк 1-й элемент складывается с 1-м, второй – со вторым и т.д.)

Пример. Прибавим в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ третью строку к

первой с коэффициентом -7 . Получим $\begin{pmatrix} -48 & -54 & -60 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Элементарные преобразования II и III типа.

Элементарное преобразование 2 типа меняет i -е и j -е уравнения. Соответствующее элементарное преобразование матрицы меняет i -ю и j -ю строки.

Элементарное преобразование 3 типа умножает и левую и правую часть i -го уравнения на некоторое число $c \neq 0$. При этом i -я строчка соответствующей расширенной матрицы коэффициентов умножается на c .

Теорема. При элементарных преобразованиях мы переходим к эквивалентной системе.

Доказательство. Пусть (y_1, \dots, y_n) – это некоторое конкретное решение старой СЛУ. Тогда (y_1, \dots, y_n) также является решением и преобразованной СЛУ. В самом деле, если уравнение не поменялось, то в него (y_1, \dots, y_n) подходит. Если обе части уравнения умножить на c , то при подстановке (y_1, \dots, y_n) получится верное равенство. Остается проверить для I типа: из равенств $a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n = b_i$ и $a_{j1}y_1 + \dots + a_{jn}y_n = b_j$ следует, что

$$a_{j1}y_1 + \dots + a_{jn}y_n + \lambda(a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n) = b_j + \lambda b_i$$

Таким образом, любое решение старой СЛУ – это и решение новой, то есть множество решений не уменьшилось. С другой стороны обратное к элементарному преобразование также элементарно. А значит, множество старой системы не может быть меньше, чем у новой. То есть множества решений совпадают.

Определение.

Лидер (ведущий элемент) строки матрицы – это самое левое

ненулевое число.
$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & \mathbf{4} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение.

Матрица называется ступенчатой, если все нулевые строки (если они есть) стоят снизу, а номера столбцов, в которых стоят лидеры ненулевых строк, образуют строго возрастающую последовательность.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Наша цель – привести матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду.

Шаг алгоритма. Выбираем самый левый не полностью нулевой столбец матрицы. (Если такого нет, то матрица нулевая, а значит, ступенчатая.) Пусть его номер k . Перестановкой строк, если нужно, делаем так, чтобы ненулевым был элемент в 1 строке k -го столбца. Затем вычитаем первую строку из остальных с нужными коэффициентами так, чтобы все элементы k -го столбца, кроме того, что стоит в 1 строке, стали равны нулю. Переходим к рассмотрению матрицы без 1 строки и без первых k столбцов. То есть далее мы повторяем шаг для этой более маленькой матрицы. Элементарные преобразования с ее строками можно интерпретировать как элементарные преобразования со строками начальной матрицы с 2-ой (в первых k столбцах у них стоят нули и элементарные преобразования этого не испортят).

Теперь наша цель – решить систему со ступенчатой матрицей.

Определение.

Назовем уравнение экзотическим, если оно имеет вид $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$, где $b \neq 0$.

Экзотическое уравнение есть в нашей системе тогда и только тогда, когда последняя ступенька матрицы имеет длину 1, то есть лидер последней ненулевой строки стоит в последнем столбце. Если в нашей системе есть экзотическое уравнение, то она несовместна.

Сейчас мы увидим, что в случае, когда экзотического уравнения нет, система всегда совместна.

Пусть экзотических уравнений нет. Переменные соответствуют столбцам матрицы (кроме последнего, он соответствует правым частям). Назовем те переменные, в столбцах которых есть лидеры, главными, а остальные свободными.

Пример. Для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ главными являются x_2 и x_4 , а свободными – x_1 и x_3 .

Теорема. Для каждого набора значений свободных переменных существует единственный набор значений главных переменных, который дополняет данный набор до решения системы.

Доказательство. Идем по строкам нашей матрицы снизу-вверх. Рассмотрим последнюю ненулевую строку. Пусть ее номер l . В соответствующем уравнении есть ровно одна главная переменная, пусть это x_s , причем она входит с коэффициентом $a_{ls} \neq 0$.

$$0x_1 + \dots + 0x_{s-1} + a_{ls}x_s + \dots + a_{ln}x_n = b_l.$$

$$0x_1 + \dots + 0x_{s-1} + a_{l,s}x_s + \dots + a_{l,n}x_n = b_l.$$

Выразим x_s через свободные:

$$x_s = \frac{b_l - a_{l,s+1}x_{s+1} - \dots - a_{l,n}x_n}{a_{l,s}}.$$

Далее переходим к следующей ненулевой строке. В соответствующее уравнение входит 2 главных переменных: x_s (с возможно нулевым коэффициентом $a_{l-1,s}$) и новая главная переменная x_p с ненулевым коэффициентом $a_{l-1,p}$:

$$0x_1 + \dots + 0x_{p-1} + a_{l-1,p}x_p + \dots + a_{l-1,s}x_s + \dots + a_{l-1,n}x_n = b_{l-1}.$$

Выражаем x_p через остальные и подставляем выражение x_s через свободные. Получается выражение x_p только через свободные переменные. И т.д.

Итоговый ответ к системе получается в следующем виде: либо система несовместна, либо есть разбиение всех переменных на главные и свободные, свободные принимают произвольные значения, а главные выражены через свободные.

Замечание

Форма ответа не единственная. Например, часто можно выбрать другие переменные свободными. Нужно лишь, чтобы в каждое новое уравнение при движении снизу вверх входила ровно одна новая главная переменная.

Предложение. Количество решений у СЛУ (над \mathbb{R}) может быть либо ноль, либо 1, либо бесконечность.

Доказательство. Если система совместна и есть хотя бы одна свободная переменная, то она может принимать любые значения, а значит, количество решений бесконечно. Если же система совместна, но все переменные главные, то они выражаются однозначно лишь через правые части, то есть имеется ровно одно решение.

Сформулируем результат предыдущего предложения более явно. Назовем матрицу строго ступенчатой, если она ступенчатая и в каждом столбце кроме последнего есть лидер строки. Из этого сразу следует, что количество ненулевых строк равно количеству переменных.

Следствие.

- СЛУ несовместна тогда и только тогда, когда в ступенчатом виде есть экзотическое уравнение.
- СЛУ определена тогда и только тогда, когда ступенчатый вид расширенной матрицы коэффициентов является строго ступенчатым.
- В любом случае, кроме перечисленных двух, у СЛУ бесконечное количество решений.