# Лекция 3. Векторные пространства. Линейная зависимость векторов.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

10 сентября, 2021

# Векторное (линейное) пространство.

Векторное пространство – это множество $V$ – с двумя операциями: сложением $+\colon V \times V \to V$ и умножение на число $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

1) для любых $a, b, c \in V$ выполнено $(a+b)+c = a+(b+c)$;
2) существует $\overline{0} \in V$ такой, что для каждого $v \in V$ верно $\overline{0} + v = v + \overline{0} = v$;
3) для каждого $v \in V$ существует $-v \in V$ такой, что $v + (-v) = (-v) + v = \overline{0}$;
4) для любых $a, b \in V$ выполнено $a + b = b + a$;
5) для каждых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v, w \in V$ выполнено $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$;
6) для каждых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ выполнено $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$;
7) для каждых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ выполнено $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$;
8) для каждого $v \in V$ выполнено $1 \cdot v = v$.

# Примеры.

- $\mathbb{R}$;
- Множество векторов на прямой/плоскости/в пространстве;
- Пространство строк;
- Многочлены;
- Функции на множестве;
- Матрицы $m \times n$ с операциями

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

# Простейшие свойства.

- Нулевой вектор $\overline{0}$ единственный.
  **Доказательство.** Допустим есть два нулевых вектора $\overline{0}_1$ и $\overline{0}_2$. Тогда $\overline{0}_1 = \overline{0}_1 + \overline{0}_2 = \overline{0}_2$.
- Противоположный вектор единственный.
  **Доказательство.** Пусть есть 2 противоположных вектора $w$ и $w'$ к вектору $v$. Тогда
  $w = w + \overline{0} = w + (v + w') = (w + v) + w' = \overline{0} + w' = w'$.
- $0 \cdot v = \overline{0}$.
  **Доказательство.**
  $w = 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v = w + w \Rightarrow$
  $w + (-w) = w + w + (-w) \Rightarrow \overline{0} = w + \overline{0} = w$.
- $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$. Упражнение.

# Простейшие свойства.

- $(-1) \cdot v = -v$.
  **Доказательство.**
  $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = \overline{0}$.
- $-(v + w) = (-v) + (-w)$. Упражнение.
- $-(-v) = v$. Упражнение.
- $\lambda \cdot v = \overline{0} \Leftrightarrow v = \overline{0}$ или $\lambda = 0$.
  **Доказательство.** Допустим, что $\lambda \neq 0$. Тогда
  $\overline{0} = \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{0} = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = (\frac{1}{\lambda}\lambda) \cdot v = 1 \cdot v = v$.

# Подпространства.

## Определение.

Подмножество $U \subset V$ называется векторным подпространством, если оно само по себе является векторным пространством относительно тех же операций.

## Теорема.

Пусть $U \subset V$ – подмножество в векторном пространстве $V$. Тогда $U$ – подпространство в $V$, если и только если выполнены следующие условия
1) для любых $u_1, u_2 \in U$ выполнено $u_1 + u_2 \in U$;
2) для любых $u \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\lambda u \in U$.

**Доказательство.** Пусть $U$ – подпространство в $V$. Тогда сумма двух его элементов лежит снова в $U$ и умножение любого элемента на число лежит в $U$. (Просто потому, что операции определены на $U$.)

Наоборот, пусть выполнены условия 1) и 2). Они гарантируют, что на $U$ корректно определены операция сложения и умножения на число.
Аксиомы 1, 4, 5, 6, 7 и 8 сразу следуют из того, что они выполнены на $V$.
Для выполнения аксиомы 2 нам нужо показать, что $\overline{0}$ (который существует в $V$) попадает в $U$. Возьмем $u \in U$. Тогда $0 \cdot u = \overline{0} \in U$.
Проверим выполнение аксиомы 3. Пусть $u \in U$. Тогда $-u = (-1) \cdot u \in U$.
Доказательство закончено.

## **Теорема.** Рассмотрим однородную СЛУ. Множество $W$ ее решений является подпространством в $\mathbb{R}^n$.

**Доказательство.** Пусть $A$ – матрица коэффициентов нашей СЛАУ. И пусть есть 2 решения $(y_1, \ldots, y_n)$ и $(z_1, \ldots, z_n)$ из $W$. Это значит, что для каждого $j$ выполняется

$$a_{j1}y_1 + \ldots + a_{jn}y_n = a_{j1}z_1 + \ldots + a_{jn}z_n = 0.$$

Рассмотрим строку
$(t_1, \ldots, t_n) = (y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n) = (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)$.
Тогда

$$a_{j1}t_1 + \ldots + a_{jn}t_n = a_{j1}(y_1 + z_1) + \ldots + a_{jn}(y_n + z_n) =$$

$$= (a_{j1}y_1 + \ldots + a_{jn}y_n) + (a_{j1}z_1 + \ldots + a_{jn}z_n) = 0.$$

То есть $(t_1, \ldots, t_n) \in W$.

Аналогично. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то обозначим $(s_1, \ldots, s_n) = \lambda \cdot (y_1, \ldots, y_n) = (\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)$. Имеем

$$a_{j1}s_1 + \ldots + a_{jn}s_n = a_{j1}\lambda y_1 + \ldots + a_{jn}\lambda y_n = \lambda(a_{j1}y_1 + \ldots + a_{jn}y_n) = 0.$$

То есть $(s_1, \ldots, s_n) \in W$.

### Определение.

Пусть $v_1, \ldots, v_k$ – векторы из векторного пространства $V$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – числа. Линейная комбинация векторов $v_1, \ldots, v_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – это выражение $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$. Значение этой линейной комбинации – это вектор из $V$.
Линейная комбинация называется тривиальной, если $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ и нетривиальной иначе (то есть если хотя бы один из коэффициентов не равен нулю).

### Определение.

Система векторов $\{v_1, \ldots, v_k\}$ из векторного пространства называется линейно зависимой (ЛЗ), если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю. Иначе система называется линейно независимой (ЛНЗ).

Переформулировка: система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛНЗ, если из $\sum \lambda_i v_i = 0$ следует $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

# Случаи $k = 1, 2$

$k = 1$. Система $\{v_1\}$ ЛЗ $\Leftrightarrow$ $v_1 = \overline{0}$.
$k = 2$. Система $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ тогда и только тогда, когда $v_1 = cv_2$ или $v_2 = cv_1$.
**Доказательство.** Пусть $v_1 = cv_2$. Тогда $1 \cdot v_1 + (-c) \cdot v_2 = 0$ – нетривиальная линейная комбинация. То есть $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ.
Аналогично, если $v_2 = cv_1$, то $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ.
Пусть теперь наоборот $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ. То есть существуют $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ такие, что

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = 0.$$

Если $\lambda \neq 0$, то

$$v_1 = -\frac{\mu}{\lambda} v_2.$$

Если же $\mu \neq 0$, то

$$v_2 = -\frac{\lambda}{\mu} v_1.$$

# Общий случай для $\mathbb{R}^n$.

Чтобы проверить, верно ли, что $\{v_1, \ldots, v_k\}$, $v_i \in \mathbb{R}^n$ ЛНЗ, нужно приравнять линейную комбинацию $\sum \lambda_i v_i$ к нулю, получить линейную систему и понять, есть ли у нее ненулевое решение.

**Пример.** Проверим, является ли ЛНЗ система $\{(1,1,1),(1,2,3),(2,4,6)\}$. Имеем

$$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,2,3) + \lambda_3(2,4,6) = \\ = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3)$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0; \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0; \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0. \end{cases} \qquad \text{с матрицей} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 3 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 1 & 3 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Есть свободная неизвестная. $\Rightarrow$ Есть ненулевое решение, $\Rightarrow$ Система ЛЗ.

**Замечание**

Система всегда получается с матрицей, в которой данные векторы стоят по столбцам.

# Свойства линейной зависимости.

**Свойство 1.** Пусть $S$ и $S'$ – две (конечные) системы векторов такие, что $S \subseteq S'$. Если система $S$ ЛЗ, то система $S'$ ЛЗ.

**Доказательство.** Пусть $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ и $S' = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1} \dots v_n\}$. Так как $S$ ЛЗ, существуют $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$ такие, что

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + 0 v_{m+1} + \ldots + 0 v_n = 0.$$

И при этом $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$.

**Переформулировка.** Если $S'$ ЛНЗ, то $S$ ЛНЗ.

# Свойства линейной зависимости.

**Свойство 2.** Система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛЗ тогда и только тогда, когда существует номер $1 \leq j \leq k$ такой, что $v_j$ равен некоторой линейной комбинации остальных векторов.

**Доказательство.** Пусть

$$v_j = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \lambda_k v_k.$$

Тогда

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + (-1) v_j + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \lambda_k v_k = 0,$$

то есть $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛЗ.

Наоборот, пусть $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛЗ, то есть существует нетривиальная линейная комбинация $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Так как линейная комбинация нетривиальна, существует $\mu_j \neq 0$. Тогда

$$v_j = -\frac{\mu_1}{\mu_j} v_1 - \ldots - \frac{\mu_{j-1}}{\mu_j} v_{j-1} - \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} v_{j+1} - \ldots - \frac{\mu_k}{\mu_j} v_k.$$

Если вектор $u$ равен некоторой линейной комбинации векторов $v_1, \ldots, v_k$, то есть существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, что

$$u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k,$$

то говорят, что вектор $u$ <u>линейно выражается</u> через векторы $v_1, \ldots, v_k$.

**Свойство 3. (Уточнение свойства 2)** Пусть система $\{v_1, \dots, v_k\}$ ЛНЗ и пусть система $\{v_1, \dots, v_k, w\}$ ЛЗ. Тогда существует единственный набор чисел $\mu_1, \dots, \mu_k$ такой, что $w = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k$.

**Доказательство.** Так как система $\{v_1, \dots, v_k, w\}$ ЛЗ, существуют не все нулевые числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda$ такие, что $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k + \lambda w = 0$. Если $\lambda = 0$, то получаем нетривиальную линейную комбинацию $\{v_1, \dots, v_k\}$, равную 0. Противоречие. Значит, $\lambda \neq 0$. Тогда

$$w = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \ldots - -\frac{\lambda_k}{\lambda} v_k.$$

Допустим, что $w = \sum \alpha_i v_i = \sum \beta_i v_i$. Тогда

$$0 = \sum \alpha_i v_i - \sum \beta_i v_i = \sum (\alpha_i - \beta_i) v_i.$$

Значит, для каждого $j$ выполнено $\alpha_j = \beta_j$.

## Лемма. (Основная лемма о линейной зависимости)

Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ и $\{w_1, \ldots, w_m\}$ – две системы векторов. И пусть каждый вектор $v_i$ линейно выражается через $w_1, \ldots, w_m$. Если $n > m$, то система $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ЛЗ.

**Доказательство.** Введем обозначения для коэффициентов выражения $v_i$ через $w_1, \ldots, w_m$:

$$v_i = a_{1i}w_1 + \ldots + a_{mi}w_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \left( \lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i a_{ji} w_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji} w_j = \sum_{j=1}^{m} \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji} \right) w_j.$$

Покажем, что найдутся не все нулевые $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что $\sum_{i=1}^n a_{ji}\lambda_i = 0$ для каждого $j$. Тогда для таких $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ получим $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \overline{0}$, то есть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ЛЗ.
Получаем однородную СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_i + \ldots + a_{1n}\lambda_n = 0; \\ \ldots \\ a_{m1}\lambda_i + \ldots + a_{mn}\lambda_n = 0. \end{cases}$$

У этой однородной СЛУ количество уравнений меньше количества неизвестных. Следовательно, решений бесконечно много. А значит, есть ненулевое решение.
**Лемма доказана.**