Лекция 12.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

22 октября, 2021

Формулы Крамера.

Рассмотрим квадратную СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Пусть A – матрица коэффициентов (не расширенная) этой СЛУ. Рассмотрим квадратные матрицы $A_1, \ldots, A_n$, где матрица A_i получена из A заменой i-го столбца на столбец свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Теорема (Крамер)

Данная СЛУ определена тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. В этом случае решение находится по формуле $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$.

Пример. Решим СЛУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$$

Имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \ \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -1, \ \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -2.$$

Отсюда СЛУ определена и

$$x_1 = \frac{-1}{-1} = 1, \ x_2 = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Доказательство.

Пусть A – матрица коэффициентов системы и B – столбец правых частей. Мы знаем, что система определена тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов A равен рангу расширенной матрицы коэффициентов $(A|B)$ и равен количеству неизвестных. Так как матрица A квадратная, ее ранг равен количеству неизвестных тогда и только тогда, когда он равен размеру этой матрицы, то есть $\det A \neq 0$. С другой стороны, если $\det A \neq 0$, то $\mathrm{rk}\, A = n$ и тогда $n = \mathrm{rk}\, A \leq \mathrm{rk}\,(A|B) \leq n$. Отсюда ранги A и $(A|B)$ равны, то есть выполнены все условия определенности системы.

Пусть теперь $\det A \neq 0$. Тогда матрица A обратима. Изначальная СЛУ в матричном сиде имеет вид $AX = B$, где X – столбец решения. Умножая слева на A^{-1}, получаем $X = A^{-1}B$.

Продолжение оказательства.

Рассмотрим матрицу $A^{-1}A_i$. Каждый столбец умножается на A^{-1} отдельно. Поэтому в матрице $A^{-1}A_i$ все столбцы, кроме i-го – это столбцы единичной матрицы, а i-ый – это столбец X. Получаем, что

$$\frac{\det A_i}{\det A} = \det(A_i A^{-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{vmatrix} = x_i.$$

Напомним, что $k \times k$-минор (минор порядка k) матрицы A – это определитель подматрицы, стоящей на пересечении некоторых k строк и некоторых k столбцов матрицы A.

Теорема о ранге матрицы.

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$. Ранг матрицы A равен максимальному порядку ненулевого минора этой матрицы.

Доказательство. Для того, чтобы доказать заявленное равенство, докажем неравенства в одну и другую сторону. Сперва докажем, что ранг не меньше, чем порядок любого ненулевого минора данной матрицы. Пусть в A есть ненулевой минор порядка k. И пусть это опредeлеитель матрицы, стоящей на пересечении строк $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, \ldots, j_k$. Так как определитель этой $k \times k$-матрицы не равен нулю, ее строки ЛНЗ. Однако строки данной матрицы – это строки $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, в которых убраны некоторые координаты (с одинаковыми номерами). Следовательно, строки $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ ЛНЗ, то есть $\mathrm{rk}\, A \geq k$.

Продолжение доказательства.

Пусть теперь $\operatorname{rk} A = k$. Докажем, что в A найдется ненулевой минор порядка k. Выберем базисные строки $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ и рассмотрим подматрицу P размера $k \times n$ в матрице A, состоящую из этих строк. Так как строки P ЛНЗ, $\operatorname{rk} P = k$. Выберем базисные столбцы матрицы P. Это столбцы с номерами $j_1, \ldots, j_k$ и они ЛНЗ. Следовательно, матрица, состоящая из этих базисных столбцов имеет ранг k, а значит, определитель этой матрицы не 0. Но это в точности подматрица матрицы A, стоящая на пересечении строк $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, \ldots, j_k$.

Пример.

Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ имеет ранг 2. Минор на пересечении строк 1 и 2 и стобцов 2 и 3. Не равен нулю. А все 4 минора 3×3 равны нулю.

Замечание.

Не верно, что на пересечении любых k ЛНЗ строк и k ЛНЗ столбцов стоит матрица с ненулевым определителем. Например, если взять ненулевую строку и ненулевой столбец, на их пересечении может стоять ноль (в единичной матрице, например).

Задача.

Докажите, что если взять базисные строки и базисные столбцы, то матрица на их пересечении будет иметь ненулевой определитель.

Минор $(k+1)\times(k+1)$ называется окаймляющим минором для данного минора $k\times k$, если соответствующая подматрица получена добавлением 1 строки и 1 столбца к подматрице минора $k\times k$.

Теорема. Если данный минор $k\times k$ матрицы A не равен нулю, а все его окаймляющие миноры равны нулю, то $\operatorname{rk} A = k$.

Доказательство. По теореме о ранге матрицы $\operatorname{rk} A \geq k$. Допустим, что $\operatorname{rk} A \geq k+1$. Пусть данный нам ненулевой минор стоит на пересечении строк $i_1,\ldots,i_k$ и столбцов $j_1,\ldots,j_k$. Тогда существует строка с номером $i_{k+1}\notin\{i_1,\ldots,i_k\}$ такая, что система строк с номерами $i_1,\ldots,i_k,i_{k+1}$ ЛНЗ. Рассмотрим матрицу P размера $(k+1)\times n$, состоящую из этих строк. Ранг этой матрицы $k+1$. Тогда столбцы $P^{(j_1)},\ldots,P^{(j_k)}$ ЛНЗ так как даже если убрать строчку i_{k+1}, то они будут ЛНЗ. Дополним столбцы $P^{(j_1)},\ldots,P^{(j_k)}$ до база системы столбцов P некоторым столбцом $P^{(j_{k+1})}$. Матрица, состоящая из столбцов $P^{(j_1)},\ldots,P^{(j_k)},P^{(j_{k+1})}$ имеет ненулевой определитель.

Определитель Вандермонда.

Теорема

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Доказательство. Обозначим данный определитель через $V(x_1, \dots, x_n)$ и докажем теорему по индукции по n.

База. $n = 2$.

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Шаг. Вычтем каждый столбец, умноженный на x_1 из следующего (сначала вычетаем $n-1$-ый из n-го, затем $n-2$-ой из $n-1$-го и т.д.)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)\dots(x_n - x_1)V(x_2, \dots, x_n).$$

Задача интерполяции.

Задача интерполяции заключается в том, чтобы найти функцию $f(x)$ (обычно не любую, а из какого-то заданного класса "хороших"функций) такую, что в n различных точках $x_1, \ldots, x_n$ она принимает заданные значения $y_1, \ldots, y_n$.

Теорема

Для любых различных $x_1, \ldots, x_n$ и любых $y_1, \ldots, y_n$ существует единственный многочлен $f(x)$ степени не более $n-1$, такой что $f(x_i) = y_i$ для всех i.

Доказательство. Будем искать этот многочлен с неопределенными коэффициентами:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1}.$$

Тогда условие $f(x_i) = y_i$ дает линейное уравнение на $c_0, \ldots, c_{n-1}$. Получаем квадратную СЛУ с матрицей $V(x_1, \ldots, x_n)$. Так как все x_i различны, определитель не ноль и система определена.

Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Многочлен, решающий задачу интерполяции, можно выписать явно.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\prod\limits_{j \neq i} x - x_j}{\prod\limits_{j \neq i} x_i - x_j} y_i \right).$$

Данная фформула называется интерполяционной формулой Лагранжа.