Лекция 6.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

24 сентября, 2021

Рассмотрим СЛУ с матрицей коэффициентов A и с правой частью b. Пусть $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ – некоторое частное решение. Тогда для любого решения $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ассоциированной с данной однородной системы, вектор $X + Z$ является решением неоднородной системы. Действительно

$$\sum a_{ij}x_j = 0, \sum a_{ij}z_j = b_i, \text{ следовательно} \sum a_{ij}(x_j + z_j) = b_i.$$

Напротив, если $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ – решение неоднородной системы, то $Y - Z$ – решение ассоциированной однородной. Получаем следующее утверждение.

Предложение.

Общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения этой неоднородной системы плюс общее решение ассоциированной однородной системы.

Геометрически. Множество решений неоднородной системы – это пространство решений однородной системы, смещенное на вектор частного решения неоднородной системы.

Определение.

Отображение φ из векторного пространства U в векторное пространство V называется <u>линейным</u>, если
1) $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$;
2) $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Примеры.
1) Отображение в ноль.
2) $U = V$, умножение на число.
3) $U = V = \{$множество векторов на плоскости$\}$. Поворот относительно начала координат.
4) $U = V = \{$множество векторов в пространстве$\}$. Симметрия относительно плоскости, содержащей начала координат.
5) $U = \{$множество векторов на плоскости$\}$, $V = \{$множество векторов на прямой$\}$. Ортогональная проекция на ось OX.
6) $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^5$, $\varphi(x, y) = (x, y, x + y, 0, x)$.
7) $U = \mathbb{R}[x]_6$, $V = \mathbb{R}[x]_5$, $\varphi(f(x)) = f'(x)$.

Определение.

Изоморфизм векторных пространств – это биективное линейное отображение. Если между U и V есть изоморфизм, то эти пространства называются изоморфными.

Теорема.

Любое n-мерное векторное пространство изоморфно $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть U – векторное пространство с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда любой вектор $u \in U$ однозначно записывается в виде $\sum x_i e_i$. Рассмотрим $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^n$, $u \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$. Несложно видеть, что φ – изоморфизм.

Пусть $\varphi\colon U \to V$ – линейное отображение. Фиксируем базис $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в U и $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ в V. Тогда $\varphi(e_i) \in V$, а значит, существуют коэффициенты a_{ij} такие, что

$$\varphi(e_i) = a_{1i} f_1 + \ldots + a_{mi} f_m.$$

Скажем, что матрица $(a_{ij}) = A = M(\varphi, e, f)$ – это матрица линейного отображения φ в базтсах e и f. В матрице A по столбцам стоят координаты в базисе f образов базисных векторов из e.

Операции с линейными отображениями

Пусть $\varphi\colon U \to V$, $\psi\colon U \to V$, $\xi\colon V \to W$. Тогда определены следующие операции.

- Сумма линейных отображений φ и ψ. По определению $(\varphi+\psi)(u) = \varphi(u)+\psi(u)$. Надо проверить, что отображение $\varphi+\psi$ линейно. В самом деле $(\varphi+\psi)(u_1+u_2) = \varphi(u_1+u_2)+\psi(u_1+u_2) =$ $= \varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\psi(u_1)+\psi(u_2) = (\varphi+\psi)(u_1)+(\varphi+\psi)(u_2)$, $(\varphi+\psi)(\lambda u) = \varphi(\lambda u)+\psi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)+\lambda\psi(u) = \lambda(\varphi+\psi)(u)$.
- Произведение линейного отображения на число. По определению $(c\varphi)(u) = c\varphi(u)$. Легко проверить, что $c\varphi$ линейно.
- Композиция линейных отображений. $\xi\circ\varphi(u) = \xi(\varphi(u))$. Проверяем линейность: $\xi\circ\varphi(u_1+u_2) = \xi(\varphi(u_1+u_2)) = \xi(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)) =$ $= \xi(\varphi(u_1))+\xi(\varphi(u_2)) = \xi\circ\varphi(u_1)+\xi\circ\varphi(u_2)$, $\xi\circ\varphi(\lambda u) = \xi(\varphi(\lambda u)) = \xi(\lambda\varphi(u)) = \lambda\xi(\varphi(u)) = \lambda\xi\circ\varphi(u)$.

Операции над матрицами.

Проследим за матрицами линейных отображений при операциях. Пусть фиксированы базисы $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в U, $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ в V и $s = \{s_1, \ldots, s_k\}$ в W. Пусть в этих базисах отображения имеют матрицы $A = M(\varphi, e, f)$, $B = M(\psi, e, f)$, $C = M(\xi, f, s)$. Обозначим $A + B = M(\varphi + \psi, e, f)$, $\lambda A = M(\lambda\varphi, e, f)$, $CA = M(\xi \circ \varphi, e, s)$.

- Сложение.

$$(\varphi+\psi)(e_i) = \varphi(e_i)+\psi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{m} (a_{ji}+b_{ij}) f_j.$$

  Таким образом

$$(A + B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji}.$$

- Умножение на число.

$$(\lambda\varphi)(e_i) = \lambda \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda a_{ji} f_j, \text{ то есть } (\lambda A)_{ji} = \lambda a_{ji}.$$

- Умножение.

$$\xi\circ\varphi(e_i)=\xi\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ji}f_j\right)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\xi(f_j)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\left(\sum_{p=1}^{k}c_{pj}s_p\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{k}a_{ji}c_{pj}s_p=\sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m}c_{pj}a_{ji}\right)s_p$$

Таким образом,

$$(CA)_{pi}=\sum_{j=1}^{n}c_{pj}a_{ji}.$$

Итак, две матрицы X и Y можно умножить тогда и только тогда, когда X имеет размеры $k\times m$, а Y – $m\times n$. При произведении этих матриц получится матрица Z размера $k\times n$ и при этом

$$z_{ij}=\sum_{l=1}^{k}x_{il}y_{lj}.$$

Пример

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&1&1\\0&2&4\\-1&5&3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot1+3\cdot0+4\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+2\cdot1+3\cdot2+4\cdot5 & 1\cdot(-3)+2\cdot1+3\cdot4+4\cdot3\\5\cdot(-1)+6\cdot1+7\cdot0+8\cdot(-1) & 5\cdot(-2)+6\cdot1+7\cdot2+8\cdot5 & 5\cdot(-3)+6\cdot1+7\cdot4+8\cdot3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&26&23\\-7&50&43\end{pmatrix}$$

Введем обозначение $0=\begin{pmatrix}0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\0&\dots&0\end{pmatrix}$

Свойства операций над матрицами

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$
2) $A+0 = 0+A = A$
3) для каждой A есть $-A$ такая, что $A+(-A) = (-A)+A = 0$
4) $A+B = B+A$,
5) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,
6) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
8) $1 \cdot A = A$.

Таким образом с операциями сложения и умножения на число матрицы $m \times n$ образуют векторное пространство. Легко видеть, что базисом этого векторного пространства является набор матриц E_{ij}, где E_{ij} имеет один ненулевой элемент, он равен 1 и стоит на месте (i,j). Таким образом

$$\dim \mathrm{Mat}_{m,n} = mn.$$