Лекция 10. Определители.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

14 октября, 2021

Определение.

Знак подстановки σ – это

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ четная,} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Теорема. (Было на прошлой лекции.)

Четность подстановки σ – это четность количества транспозиций в любом разложении σ на транспозиции.

Следствие.

Четных и нечетных подстановок одинаковое число, то есть по $\frac{n!}{2}$.

Доказательство. Отображение $\sigma \to (1,2)\sigma$ устанавливает биекцию между четными и нечетными подстановками.

Теорема.

$\mathrm{sgn}(\sigma\delta) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\delta)$.

Доказательство. Пусть $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$, $\delta = \eta_1 \dots \eta_m$ – разложения в произведения транспозиций. Тогда $\sigma\delta = \tau_1 \dots \tau_k \eta_1 \dots \eta_m$.

Следствие.

$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

Доказательство.

$$1 = \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\mathrm{sgn}(\sigma).$$

Заметим, что

$$(a_1, \ldots, a_k) = (a_1, a_2) \ldots (a_{k-1}, a_k).$$

Следствие.

$\operatorname{sgn}(a_1, \ldots, a_k) = (-1)^{k-1}$.

Определение.

Декремент подстановки σ – это число $d(\sigma)$, равное n минус количество независимых циклов (тут длины 1 считаются).

Теорема.

$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{d(\sigma)}$

Доказательство. Пусть длины независимых циклов $k_1, \ldots, k_m$. Тогда

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i=1}^{m} (-1)^{k_i - 1} = (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{m} k_i\right) - m} = (-1)^{n-m} = (-1)^{d(\sigma)}.$$

Определение.

Пусть A – квадратная матрица $n \times n$. Определителем (детерминантом) матрицы A называется число

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

В этом выражении $n!$ слагаемых. Половина – со знаком $''+''$, половина – со знаком $''-''$. Каждое слагаемое – произведение n элементов A по одному из каждой строки и по 1 из каждого столбца.

- Определитель 1×1. $\det(a_{11}) = a_{11}$.
- Определитель 2×2.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Определитель 3×3.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Теорема.

$$\det A^T = \det A.$$

Доказательство. Пусть $A^T = B$. Тогда

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} =$$

$$\langle \delta = \sigma^{-1} \rangle$$

$$= \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots a_{n\delta(n)} = \det A.$$

Разобьем матрицу на строки/столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & \dots & A^{(n)} \end{pmatrix}$$

Тогда $\det A = \varphi(A_1, \dots, A_n) = \psi(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$

Из предыдущей теоремы $\varphi = \psi$. Будем их обозначать det.

Лемма.

$$\det(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

Доказательство. В каждое слагаемое $a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ входит ровно один элемент из A_i. Он умножается на λ, значит, и все слагаемое умножается на λ.

Лемма.

$$\det(A_1,\ldots,A'_i+A''_i,\ldots,A_n)=$$
$$=\det(A_1,\ldots,A'_i,\ldots,A_n)+\det(A_1,\ldots,A''_i,\ldots,A_n).$$

Доказательство.

$$\det(A_1,\ldots,A'_i+A''_i,\ldots,A_n)=$$
$$=\sum_{\delta\in S_n}\mathrm{sgn}(\delta)a_{1\delta(1)}\ldots(a'_{i\delta(i)}+a''_{i\delta(i)})\ldots a_{n\delta(n)}=$$
$$=\sum_{\delta\in S_n}\mathrm{sgn}(\delta)a_{1\delta(1)}\ldots a'_{i\delta(i)}\ldots a_{n\delta(n)}+$$
$$+\sum_{\delta\in S_n}\mathrm{sgn}(\delta)a_{1\delta(1)}\ldots a''_{i\delta(i)}\ldots a_{n\delta(n)}=$$
$$=\det(A_1,\ldots,A'_i,\ldots,A_n)+\det(A_1,\ldots,A''_i,\ldots,A_n).$$

Определение.

Функция $F(v_1, \ldots, v_k)$ от k векторных аргументов называется полилинейной, если при фиксированных значениях всех, кроме одного аргументов она является линейной по этому аргументу.

Две предыдущие леммы дают следующую теорему.

Теорема.

Определитель является полилинейной функцией от строк (столбцов) матрицы.

Следствие.

Определитель матрицы с нулевой строкой (нулевым столбцом) равен нулю.

Доказательство. Умножим эту нулевую строку на ноль. С одной стороны определитель не поменяется. С другой, он умножится на ноль.

Теорема. (свойство кососимметричности)

$$\det(A^{(1)}, \ldots, A^{(i)}, \ldots, A^{(j)}, \ldots, A^{(n)}) = \\ = -\det(A^{(1)}, \ldots, A^{(j)}, \ldots, A^{(i)}, \ldots, A^{(n)}).$$

Доказательство. Пусть $A = (A^{(1)}, \ldots, A^{(i)}, \ldots, A^{(j)}, \ldots, A^{(n)})$, $B = (A^{(1)}, \ldots, A^{(j)}, \ldots, A^{(i)}, \ldots, A^{(n)})$. Тогда

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \ldots b_{ki} \ldots b_{sj} \ldots b_{n\sigma(n)} =$$

$$\langle \text{ тут } i = \sigma(k), j = \sigma(s), \text{ положим } \delta = (i,j)\sigma \rangle$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{kj} \ldots a_{si} \ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\delta(1)} \ldots a_{n\delta(n)} =$$

$$= \sum_{\delta \in S_n} (-\operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \ldots a_{n\delta(n)}) = -\det A.$$

Следствие.

Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Доказательство. Поменяем местами эти две одинаковые строки. С одной стороны определитель не поменяется. С другой, он умножится на минус 1.

Следствие.

Определитель матрицы с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

Доказательство.

$$\det(A_1, \ldots, A_i \ldots \lambda A_i, \ldots, A_n) =$$
$$= \lambda \det(A_1, \ldots, A_i \ldots A_i, \ldots, A_n) = \lambda 0 = 0.$$

Предложение.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Доказательство. Для любой нетождественной подстановки σ существует i такой, что $\sigma(i) < i$. В самом деле, если не верно $\sigma(n) < n$, то $\sigma(n) = n$. Аналогично, если не верно $\sigma(n-1) < n-1$, то $\sigma(n-1) = n-1$, и т.д. Рассмотрим слагаемое определителя, соответствующее σ. Оно равно $\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)}$. Если $\sigma(i) < i$, то $a_{i\sigma(i)} = 0$, а значит, и все слагаемое ноль. Остается только слагаемое, соответствующее id, равное $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Частный случай. $\det E = 1$.

Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк/столбцов.

- При элементарном преобразовании III типа с коэффициентом c определитель умножается на c. (Линейность.)
- При элементарном преобразовании II типа определитель умножается на -1. (Кососимметричность.)
- При элементарном преобразовании I типа определитель не меняется.

Доказательство.

$$\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j + \lambda A_i, \dots, A_n) =$$
$$= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_i, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n).$$

Второе слагаемое равно нулю, так как это определитель матрицы с пропорциональными строками.

Алгоритм вычисления определителей.

1) Приводим элементарными преобразованиями матрицу к ступенчатому виду. При этом (при элементарных преобразованиях 2 и 3 типа) определитель умножается на ненулевое число. Перемножаем эти числа и запоминаем результат μ.
2) Если ступенчатый вид матрицы не является строго ступенчатым (то есть есть нулевая строка), то конечный определитель ноль, а значит, и начальный определитель ноль.
3) Если ступенчатый вид строго ступенчатый, то конечный определитель равен произведению диагональных элементов. Деля на μ, находим начальный определитель.

Примеры.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-1) = -6,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Нами уже доказана следующая теорема.

Теорема.

Для матрицы A размера $n \times n$ следующие условия эквивалентны:

1) $\mathrm{rk} A < n$,

2) в ступенчатом виде A есть нулевая строка,

3) $\det A = 0$.

Теорема.

Пусть $\Phi\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ – кососимметричная полилинейная функция. Тогда $\Phi(A) = \Phi(E)\det(A)$.

Доказательство. Из линейности следует, что если в матрице B есть нулевая строка, то $\Phi(B) = 0$. Из кососимметричности следует, что если в матрице C есть две одинаковые строки, то $\Phi(C) = 0$. Из линейности, если в матрице D есть две пропорциональные строки, то $\Phi(D) = 0$. Отсюда можно так же, как и для определителя, вывести, что Φ не меняется при элементарных преобразованиях строк I типа. Из кососимметричности, при элементарных преобразованиях II типа Φ умножается на -1. Из линейности, при элементарных преобразованиях строк III типа с коэффициентом c, определитель умножается на c. Таким образом, Φ и det умножаются на одинаковые числа при всех элементарных преобразованиях.

Продолжение доказательства.

Приведем матрицу A к улучшенному ступенчатому виду S. При этом для некоторого $\mu \neq 0$ выполнено $\Phi(A) = \mu\Phi(S)$, $\det(A) = \mu \det(S)$. Если S имеет нулевую строку, то $\det(S) = \Phi(S) = 0$, а значит, $\det(A) = \Phi(A) = 0$. И выполнено $\Phi(A) = \Phi(E) \det(A)$.

Если же в S нет нулевой строки, то $S = E$. Имеем $\det(A) = \mu \det(E) = \mu$. Тогда

$$\Phi(A) = \mu\Phi(E) = \Phi(E) \det(A).$$