Лекция 15.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

12 ноября, 2021

Комплексные числа соответствуют точкам плоскости. Числу $a + bi$ сопоставляется точка (a, b). При этом на оси абсцисс лежат вещественные числа, а на оси ординат – число мнимые числа вида bi.

Определение.

Модуль числа $z = a + bi$ – это неотрицательное вещественное число $\sqrt{a^2 + b^2}$ (корень арифметический).

Модуль равен длине радиус-вектора из начала координат в точку (a, b). Модуль нулевого числа равен нулю, а для остальных чисел он положителен. При этом на вещественной оси модуль совпадает со стандартным модулем вещественного числа.

Определение.

Аргумент ненулевого числа $z = a + bi \neq 0$ – это величина угла между положительным лучом оси абсцисс и радиус-вектором точки (a, b), причем этот угол откладывается против часовой стрелки. Обозначается аргумент $\arg z$.

Можно считать, что $\arg z \in [0, 2\pi)$. Однако удобно считать, что аргумент принимает любые значения и задан по модулю 2π. То есть, например, про число с аргументом $\frac{7\pi}{4}$ можно сказать, что его аргумент $-\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{9\pi}{4}$.

Аргумент нулевого числа не определен.

Комплексное сопряжение.

Определение.

Пусть $z = a + bi$. Тогда комплексно сопряженное к z число – это $\overline{z} = a - bi$.

Геометрически сопряжение соответствует отражению симметрично относительно оси абсцисс. При сопряжении модуль комплексного числа сохраняется, а агрумент меняет знак.

Свойства сопряжения.

- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
  Доказательство. $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} =$$
$$= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
  Доказательство.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} =$$
$$= (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Свойства сопряжения.

- $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$;
  Доказательство. $\overline{z} \cdot \overline{z^{-1}} = \overline{z \cdot z^{-1}} = \overline{1} = 1.$
- $z\overline{z} = |z|^2$.
  Доказательство.
  $$z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Деление комплексных чисел.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda \cdot (a + bi) = \lambda a + \lambda bi$. Отсюда при $\lambda \neq 0$ имеем

$$\frac{a + bi}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda} i.$$

Для того, чтобы выполнить деление $\frac{a+bi}{c+di}$ надо и числитеь и знаменатель умножить на $\overline{c + di} = c - di$. Получаем

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.$$

В знаменателе последней дроби стоит вещественное число.

Пример.

$$\frac{1+2i}{3-2i} = \frac{(1+2i)}{(3-2i)} = \frac{(1+2i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} =$$

$$= \frac{-1+8i}{13} = -\frac{1}{13} + \frac{8}{13}i$$

Пара $(r, \varphi) = (|z|, \arg z)$ задает полярные координаты точки (a, b). При этом $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Имеем:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Данная запись комплексного числа называется тригонометрической записью комплексного числа.

Чтобы перейти от алгебраической записи к тригонометрической нужно вынести за скобки $|z|$. Проделаем это:

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i\right)$$

При этом $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$, А значит,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\varphi, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\varphi.$$

Чтобы перевести из тригонометрического вида в алгебраический нужно просто раскрыть скобки.

Заметим, что вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0 \in \mathbb{R}$ единственный. В самом деле, если

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = s(\cos\psi + i\sin\psi),$$

то $|z| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r$. Аналогично, $|z| = s$, то есть $r = s$. Приравнивая, вещественную и мнимую части равенства, получаем $\cos\varphi = \cos\psi$, $\sin\varphi = \sin\psi$. Отсюда $\varphi = \psi$ (с точностью до $2\pi k$).

Теорема.

При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Перемножим два числа в тригонометрической форме:

$$
\begin{aligned}
&r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot s(\cos\psi + i\sin\psi) = \\
&= rs((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) = \\
&\qquad\qquad = rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))
\end{aligned}
$$

Следствие.

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Доказательство. Пусть

$$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{s(\cos\psi + i\sin\psi)} = t(\cos\xi + i\sin\xi).$$

Тогда

$$s(\cos\psi + i\sin\psi)t(\cos\xi + i\sin\xi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

По теореме $r = st$ и $\varphi = \psi + \xi$.

Частный случай.

$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$

Теорема. (Формула Муавра)

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрический вид комплексного числа. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Доказательство. Получается кратным применением предыдущей теоремы.

Следствие.

Формула $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ верна не только для натуральных, но и для целых n.

Доказательство. При отрицательных n нужно применить частный случай предыдущего следствия и формулу Муавра.

Извлечение корней

Определение.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Комплексное число w является n-ым корнем из z, если $w^n = z$. (Обозначается $w = \sqrt[n]{z}$.)

В вещественном случае. Число вещественных корней $\sqrt[n]{x}$ равно

$$\begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно}; \\ 2, & \text{если } n \text{ четно и } x > 0; \\ 0, & \text{если } n \text{ четно и } x < 0. \end{cases}$$

Сейчас мы докажем, что в комплексном случае. Число комплексных корней $\sqrt[n]{z}$ равно $\begin{cases} 1, & \text{если } z = 0; \\ n, & \text{если } z \neq 0. \end{cases}$

Представим z и w в тригонометрическом виде.
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = s(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тогда

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z = w^n = s^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Мы доказывали, что тригонометрический вид единственный, то есть отсюда следует, что

$$\begin{cases} r = s^n; \\ \varphi + 2\pi k = n\psi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Таким образом, $s = \sqrt[n]{r}$ – корень арифметический, $\psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что при разных k получаются вообще говоря разные (и возможно не отличающиеся на $2\pi m$). Однако, если $k_1 - k_2 = nm$, то $\frac{\varphi+2\pi k_1}{n} = \frac{\varphi+2\pi k_2}{n} + 2\pi m$. Таким образом различные (не отличающиеся на $2\pi m$) углы получатся при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Итак,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Рассмотрим множество корней $\sqrt[n]{z}$ на плоскости. У всех них модуль равен $\sqrt[n]{r}$, то есть они лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[n]{r}$. Аргументы идут через $\frac{2\pi}{n}$. Таким образом, множество корней $\sqrt[n]{z}$ образуют вершины правильного n-угольника.

Свойства корней

1) Пусть $w \in \sqrt[n]{z_1}$. Тогда $\sqrt[n]{z_1 z_2} = w\sqrt[n]{z_2}$. В самом деле, для каждого корня из $\sqrt[n]{z_2}$ мы получим корень из $\sqrt[n]{z_1 z_2}$ и их будет n различных.

2) Пусть $w \in \sqrt[n]{z_1}$. Тогда $\sqrt[n]{z_1/z_2} = w/\sqrt[n]{z_2}$.

3) Пусть $d \mid n$, тогда $\left(\sqrt[n]{z}\right)^d = \sqrt[n/d]{z}$.

4) Пусть $d \mid n$. Не верно, что $\sqrt[n]{z^d} = \sqrt[n/d]{z}$.