Лекция 20.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

3 декабря, 2021

Теорема (Декарт)

Пусть нам дан многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$. Количество перемен знака в последовательности $a_0, \ldots, a_n$ обозначим через $L(f)$. Количество положительных корней с учетом кратностей обозначим через $N(f)$.

1) $N(f) \equiv L(f) \pmod{2}$,
2) $N(f) \leq L(f)$,
3) если f не имеет комплексных (не вещественных) корней, то $N(f) = L(f)$.

Доказательство.

3. Рассмотрим $\widetilde{(f)}(x) = f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots$. Тогда $L(f) + L(\widetilde{f}) \leq n$. В самом деле, если все коэффициенты $a_i \neq 0$, то перемена знака в последовательности $a_0, -a_1, a_2, -a_3 \dots$ есть на i-ом месте тогда и только тогда, когда ее нет в последовательности $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$ То есть в этом случае $L(f) + L(\widetilde{f}) = n$. В общем же случае, когда среди a_j есть нули, заменим их на любые ненулевые числа. При этом количество перемен знака как в последовательности $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$, так и в последовательности $a_0, -a_1, a_2, -a_3 \dots$ может только возрасти. При этом мы попадем в предыдущий случай. То есть в этом случае $L(f) + L(\widetilde{f}) \leq n$.

С другой стороны $N(f) + N(\widetilde{f}) = n$, так как 0 – не корень. Если $N(f) < L(f)$, то $N(f) + N(\widetilde{f}) < L(f) + L(\widetilde{f}) \leq n$. Противоречие.

Следствие

Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Тогда число корней, больших x_0 не больше числа перемен знака в последовательности $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$. Эти два числа сравнимы по модулю 2 и совпадают, если у $f(x)$ нет комплексных (не вещественных) корней.

Число корней, меньших x_0 не больше числа перемен знака в последовательности $f(x_0), -f'(x_0), \ldots, (-1)^n f^{(n)}(x_0)$. Эти два числа сравнимы по модулю 2 и совпадают, если у $f(x)$ нет комплексных (не вещественных) корней.

Упражнение

Найдите корни многочлена $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$ с точностью до знаков после запятой (то есть их целые части).

Пусть A – область целостности. Рассмотрим множество пар $\{(a, b) | a, b \in A, b \neq 0\}$. Введем отношение эквивалентности: $(a, b) \sim (a', b')$, если $ab' = ba'$. Докажем, что это отношение эквивалентности. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Пусть $(a, b) \sim (a', b') \sim (a'', b'')$. Тогда $ab' = ba'$ и $a'b'' = b'a''$. Перемножим эти 2 равенства, получим $ab''a'b' = ba''a'b'$. Если $a'b' \neq 0$, то на него можно сократить. То есть $ab''a'b' - ba''a'b' = (ab'' - ba'')a'b' = 0$, следовательно $ab'' - ba'' = 0$. Если же $a'b' = 0$, то либо $a' = 0$, либо $b' = 0$. Но по условию $b' \neq 0$. Значит, $a' = 0$. Тогда $ab' = ba' = 0$, значит, $a = 0$. Аналогично, $a'b'' = b'a'' = 0$, значит, $a'' = 0$. Получается, что $ab'' = ba'' = 0$.

Определение

Классы эквивалентности по данному отношению назовем дробями и класс пары (a, b) будем обозначать $\frac{a}{b}$. При этом $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ тогда и тольк тогда, когда $ab' = ba'$.

Определение

Рассмотрим множество частных $Quot(A)$ дробей $\{\frac{a}{b}, a, b \in A, b \neq 0\}$ с операциями

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Докажем корректность операций. Пусть $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, тогда $\frac{a'}{b'} + \frac{c}{d} = \frac{a'd+b'c}{b'd}$. Нужно доказать, что $\frac{a'd+b'c}{b'd} = \frac{ad+bc}{bd}$. В самом деле

$$(a'd + b'c)bd - (ad + bc)b'd = a'bd^2 + b'bcd - abd^2 - b'bcd =$$
$$= (a'b - b'a)d^2 = 0.$$

Аналогично, докажем, что $\frac{a'}{b'} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

$$a'cbd - acb'd = (a'b - ba')cd = 0.$$

Теорема

Множество частных $Quot(A)$ с введенными операциями сложения и умножения является полем. (Далее будем называть его полем частных.)

Доказательство. Коммутативность, ассоциативность сложения и дистрибудивность доказываются приведением к общему знаменателю, а затем применяются тождества к числителю. Нулевой элемент $\frac{0}{1} = \frac{0}{b}$. Противоположный элемент $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$. Коммутативность и ассоциативность умножения следует из применения соответствующих свойств к числителю и знаменателю. Единичный элемент $\frac{1}{1}$. Если $a \neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

Теорема

Множество элементов $\frac{a}{1} \in Quot(A)$ образуют подкольцо в $Quot(A)$, изоморфное A. При этом каждый элемент $Quot(A)$ является отношением двух элементов из этого кольца.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi\colon A \to Quot(A)$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$. Легко проверить, что φ – инъективный гомоморфизм. Тогда образ этого гомоморфизма – кольцо, изоморфное A. При этом $\frac{a}{b} = \frac{a}{1}\left(\frac{b}{1}\right)^{-1}$. Если отождествить по φ элементы a и $\frac{a}{1}$, то $\frac{a}{b} = ab^{-1}$, то есть дробь имеет смысл деления.

Примеры.

1) Если $A = \mathbb{Z}$, то $Quot(A) = \mathbb{Q}$.
1) Если $A = F[x]$, то $Quot(A) = F(x)$ – поле рациональных дробей от 1 переменной с коэффициентами в F.

Любая дробь $\psi = \frac{f(x)}{g(x)} \in F(x)$ задает функцию

$$\psi \colon F \setminus \{g = 0\} \to F.$$

Неприятность. Область определения ψ зависит не только от класса эквивалентности пары $(f(x), g(x))$, но и от выбора представителей. Например, в $\mathbb{R}(x)$ имеем $\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}$. При этом область определения $\frac{x}{x+2}$ – это $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, а область определения $\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}$ – это $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.
Выход состоит в том, чтобы называть две рациональные функции равными, если на множестве, где оба знаменателя не равны нулю, эти функции равны.

Предложение.

Если две рациональные дроби формально равны, то они функционально равны. Если же поле F бесконечно, то верно и обратное.

Доказательство.

Пусть $\frac{f}{g} = \frac{h}{s}$. Возьмем $a \in F$ такое, что $g(a) \neq 0$ и $s(a) \neq 0$. Тогда $f(x)s(x) = g(x)h(x)$. Следовательно, $f(a)s(a) = g(a)h(a)$, а значит, $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{h(a)}{s(a)}$.

Наоборот, пусть поле F бесконечно и две функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\frac{h(x)}{s(x)}$ совпадают везде, кроме корней g и s. Тогда их разность

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{s(x)} = \frac{f(x)s(x) - h(x)g(x)}{g(x)s(x)}$$

обращается в ноль везде, кроме корней g и s. То есть многочлен $f(x)s(x) - h(x)g(x)$ имеетбесконечное количество корней. Значит, этот многочлен формально равен нулю. Следовательно, $\frac{f}{g} = \frac{h}{s}$.

Определение

Дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется <u>несократимой</u>, если НОД$(f, g) = 1$.

Теорема

Любая рациональная дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ может быть представлена в виде несократимой дроби. Причем единственным образом с точностью до умножения на ненулевую константу и числителя и знаменателя.

Доказательство. Пусть $d =$НОД(f, g). Тогда $f = d\widetilde{f}$, $g = d\widetilde{g}$. При этом НОД$(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = 1$. Следовательно, $\frac{\widetilde{f}}{\widetilde{g}} = \frac{f}{g}$ – несократимая дробь.

Продолжение доказательства.

Если же $\frac{f}{g} = \frac{h}{s}$ – две несократимые дроби, то $fs = gh$. Левая часть делится на f. Значит, $f \mid gh$. Но НОД$(f, g) = 1$. Тогда $f|h$. Докажем это. Существуют $u, v \in F[x]$ такие, что $uf + vg = 1$. Домножим на h, получим $ufh + vgh = h$. При этом f делит левую часть, а значит, $f|h$.
Аналогично, fs делится на h и НОД$(h, s) = 1$. Отсюда $h|f$. То есть $f|h$ и $h|f$. Значит, $f = \lambda h$, $\lambda \in F^{\times}$. Тогда $g = \lambda s$.

Определение

Дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ называется правильной, если $f = 0$ или $\deg f < \deg g$.

То, что дробь является правильной не зависит от ее записи. При сложении, вычитании и умножении правильных дробей получаются правильные дроби. Таким образом, правильные дроби образуют подкольцо (без единицы).

Предложение.

Любую дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Причем такое представление единственно.

Доказательство. Поделим числитель на знаменатель с остатком: $f = qg + r$. Тогда

$$\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}.$$

Единственность такого представления следует из единственности деления с остатком.

Определение

Дробь называется простейшей, если она имеет вид $\frac{f}{p^k}$, где p – неприводимый многочлен и $\deg f < \deg p$.

Примеры

1) При $F = \mathbb{C}$ все простейшие дроби имеют вид $\frac{\lambda}{(x-c)^k}$.
2) При $F = \mathbb{R}$ все простейшие дроби имеют вид либо $\frac{\lambda}{(x-c)^k}$, либо $\frac{ax+d}{(x^2+bx+c)^k}$, где $b^2 < 4c$.

Теорема

Пусть $r = \frac{f}{g} \in F(x)$ – правильная дробь. И пусть $g = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$. Тогда существует единственное разложение

$$r = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{h_{ij}}{p_i^j},$$

где $\deg h_{ij} < \deg p_i$.

Лемма

Пусть $g = g_1 g_2$, где g_1 и g_2 взаимно просты. Тогда правильную дробь $\frac{f}{g}$ можно представить в виде суммы правильных дробей $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}$.

Доказательство. НОД$(g_1, g_2) = 1$. Тогда $u_1 g_1 + u_2 g_2 = 1$. Домножим числитель нашей дроби на эту 1. Получаем

$$\frac{f}{g_1 g_2} = \frac{f u_1 g_1 + f u_2 g_2}{g_1 g_2} = \frac{f u_1}{g_2} + \frac{f u_2}{g_2}.$$

Поделим с остатком $f u_2 = q_1 g_1 + f_1$, $f u_1 = q_2 g_2 + f_2$. Тогда

$$\frac{f u_1}{g_2} + \frac{f u_2}{g_2} = q_1 + q_2 + \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

Мы получили, что правильная дробь равна суммемногочлена и правильной дроби. Следовательно, $q_1 + q_2 = 0$.

Следствие

Если $g = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$, то правильная дробь $\frac{f}{g}$ может быть представлена в виде суммы правильных дробей

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{p_1^{k_1}} + \dots + \frac{f_s}{p_s^{k_s}}$$

Доказательство. Индукция по s. База $s = 1$ очевидна. Шаг. Представим $g = p_1^{k_1}(\prod_{i>1} p_i^{k_i})$. Применим лемму. Разложим дробь в сумму правильных дробей со знаменателями $p_1^{k_1}$ и $\prod_{i>1} p_i^{k_i}$. Ко второй дроби можно применить предположение индукции.

Лемма

Правильную дробь $\frac{f}{p^k}$ можно представить в виде суммы простейших дробей
$$\frac{f}{p^k} = \frac{h_1}{p} + \frac{h_2}{p^2} + \ldots + \frac{h_k}{p^k}.$$

Доказательство. Индукция по $\deg f$. База $\deg f < \deg p$, тогда дробь $\frac{f}{p^k}$ сама по себе простейшая.
Шаг индукции. Пусть для всех многочленов g с условием $\deg g < \deg f$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ дробь $\frac{g}{p^s}$ разлагается на простейшие. Разделим f на p с остатком: $f = qp + h_k$. Имеем
$$\frac{f}{p^k} = \frac{qp + h_k}{p^k} = \frac{q}{p^{k-1}} + \frac{h_k}{p^k}.$$

Так как $\deg h_k < \deg f$ и $\deg p \geq 1$, получаем $\deg q < \deg f$. С другой стороны $qp = f - h_k$, значит,
$\deg q \leq \max\{\deg f, \deg h_k\} - \deg p < \deg p^k - \deg p < \deg p^{k-1}$.
А значит, к правильной дроби $\frac{q}{p^{k-1}}$ можно применить предположение индукции.

Замечание

В предыдущей лемме можно вести индукцию не по $\deg f$, а по k.

Доказательство теоремы (существование).

Следует из двух последних доказанных утверждений: следствия и леммы.

Доказательство теоремы (единственность).

Будет на следующей лекции.