Лекция 5.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

21 сентября, 2021

Было

Теорема.

Пусть B – подсистема векторов в системе S. Следующие условия эквивалентны:

1. B – базис S;
2. B – ЛНЗ полная подсистема;
3. B – минимальная по включению полная подсистема;
4. каждый вектор из S выражается как линейная комбинация векторов из B, причем единственным образом.

Лемма.

Из любой конечной полной системы можно выбрать базис.

Доказательство Пусть $v_1, \ldots, v_k$ – полная подсистема в S. Если она минимальна по включению, то это базис. Если нет, то можно убрать один из векторов так, чтобы система осталась полной.

Определение

<u>Рангом</u> подсистемы $S \subset V$ (в конечномерном пространстве V) называется количество $\operatorname{rk} S$ векторов в ее базисе.

Теорема

Ранг определен корректно. То есть если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис S, то в любом другом базисе S тоже n векторов.

Доказательство. Пусть B – другой базис S. Тогда, если $|B| > n$, то векторы из B зависимы по ОЛЛЗ. Наоборот, если $n > |B|$, то векотры $\{e_1, \ldots, e_n\}$ зависимы по ОЛЛЗ.

Определение

Пусть V – векторное пространство. Тогда ранг системы V называется <u>размерностью</u> векторного пространства V. И оборзначается $\dim V$.

Пример. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Замечание

Ранг системы векторов S равен размерности ее линейной оболочки. В самом деле, если B – базис S, то B – базис $\langle S \rangle$. Докажем это. Так как B – базис S, эта система ЛНЗ. С другой стороны, каждый элемент $\langle S \rangle$ – это линейная комбинация элементов $s_1, \ldots, s_k \in S$. В свою очередь каждый s_i – это линейная комбинация $b_1, \ldots, b_n$. Подставляя одни выражения в другие, получаем, что каждый элемент $\langle S \rangle$ – это линейная комбинация элементов из B. То есть B – полная система. Значит, B – базис $\langle S \rangle$.

Определение

Пусть A – матрица $m \times n$. Строчным рангом A называется ранг системы ее строк в $\mathbb{R}^n$. Аналогично, столбцовым рангом A называется ранг системы ее столбцов в $\mathbb{R}^m$.

Напомним, что рангом (ступенчатым рангом) матрицы A мы называли число ненулевых строк в ее ступенчатом виде.

Теорема

Для любой матрицы A ее строчный, столбцовый и ступенчатый ранги совпадают.

Лемма 1

Каждый вид ранга (строчный, столбцовый, ступенчатый) не меняется при элементарных преобразованиях строк.

Лемма 2

Для ступенчатой матрицы все три вида ранга совпадают.

Доказательство леммы 1.

1) Строчный ранг. При элементарных преобразованиях строк не меняется линейная оболочка строк. В самом деле, новые строки выражаются через старые. А значит, линейная оболочка не увеличивается. Но, так как элементарные преобразования обратимы, она и не уменьшится.
2) При элементарных преобразованиях строк не меняется ступенчатый вид, к которому можно привести элементарными преобразованиями строк.
3) Пусть $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ – столбцы A. Тогда, если $\sum \lambda_i A^{(i)} = 0$, то и после элементарного преобразования выполняется то же равенство $\sum \lambda_i \widehat{A}^{(i)} = 0$. Так как элементарные преобразования обратимы, они не меняют линейные зависимости между столбцами. То есть максимальная линейная независимая система до преобразования и после преобразования имеют одинаковую мощность.

Доказательство леммы 2.

Рассмотрим матрицу $\widehat{A}$ в улучшенном ступенчатом виде. Ее ненулевые строки линейно независимы. Значит, строчный ранг совпадает со ступенчатым.
С другой стороны столбцы, проходящие через лидеры, образуют базис системы столбцов. Значит и столбцовый ранг совпадает со ступенчатым.

Пусть A – матрица $m \times n$. Матрица $B = A^T$ размера $n \times m$ называется транспонированной к матрице A, если

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Ясно, что $(A^T)^T = A$.
Из доказанного выше $\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A$.

Теорема (Свойства ранга)

Пусть A – матрица $m \times n$. Тогда

- $\operatorname{rk} A \leq m$;
- $\operatorname{rk} A \leq n$;
- $\operatorname{rk} A$ не меняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.
- Если к матрице добавить k столбцов (строк), то ранг а) не уменьшится, б) увеличится не более, чем на k.

Теорема (Кронекер-Капелли)

СЛУ совместна тогда и только, когда ранг матрицы коэффициентов A равен рангу расширенной матрицы коэффициентов $\widetilde{A}$.

Доказательство. Приведцм матрицу $\widetilde{A}$ к улучшенному ступенчатому виду. Оба ранга при этом не поменяются. В ступенчатом виде ранг равен количеству ненулевых строк. Как следует из свойств ранга, ранг $\widetilde{A}$ либо равен рангу A, либо на 1 больше. Если $\operatorname{rk}\widetilde{A} = \operatorname{rk} A + 1$, то в ступенчатом виде будет экзотическое уравнение и система несовместна. Если же $\operatorname{rk}\widetilde{A} = \operatorname{rk} A$, то экзотического уравнения нет и система совместна.

Теорема (критерий определенности СЛУ)

СЛУ определена тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} \widetilde{A} = \operatorname{rk} A = n$, где n – количество переменных.

Доказательство. Если СЛУ определена, то она совместна (и значит, $\operatorname{rk} \widetilde{A} = \operatorname{rk} A$) и ступенчатый вид матрицы является строго ступенчатым, то есть количество ступенек (оно же ранг) равно количеству переменных.

ФСР

Определение

Рассмотрим однородную СЛУ. Фундаментальная система решений (ФСР) этой СЛУ – это базис пространства решений.

Алгоритм построения ФСР

Каждое решение задается значениями свободных неизвестных, которые могут быть любыми. Рассмотрим решения, свободные неизвестные которых принимают значения $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Главные переменные при этом будут принимать значения противоположные к соответсвующему столбцу. Количество векторов в ФСР равно количеству свободных неизвестных.

Пример.

Пусть улучшенный ступенчатый вид расширенной матрицы системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Свободные неизвестные – это x_2, x_3 и x_6. ФСР имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Объяснение, почему алгоритм работает

Данная система является линейно независимой, так как на месте i-ой свободной переменной в одном векторе 1, а в остальных – ноль.
Данная система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ полная. Покажем, что любое решение есть линейная комбинация данных. Рассмотрим решение u, у которого значения свободных переменных равны $a_1, \ldots, a_k$. Покажем, что $u = a_1v_1 + \ldots + a_kv_k$. В самом деле, u и $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k$ – два решения, у которых значения свободных переменных одинаковы. Так как главные переменные однозначно выражаются через свободные, то значения всех переменных совпадают.

Следствие.

Рассмотрим однородную систему с матрицей A. Размерность пространства решений равна $n - \mathrm{rk}\, A$, где n – количество переменных.

Доказательство. Размерность пространства решений равна мощности ФСР, что равно количеству свободных переменных, то есть n минус количество главных переменных. А количество главных переменных равно количеству ступенек в ступенчатом виде матрицы, то есть ранг A.