Лекция 7.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

1 октября, 2021

Связь матриц и линейных отображений.

Было. Отображение $\to$ матрица. Пусть $\varphi\colon U \to V$ – линейное отображение. Если даны базисы $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в U и $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ в V, то отображению φ можно сопоставить матрицу $A = M(\varphi, e, f)$, такую, что $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j$.

Теорема.

Любое отображение базиса $\psi\colon \{e_1, \dots, e_n\} \to V$ однозначно продолжается до линейного отображения $\psi\colon U \to V$.

Доказательство. $\psi(\sum x_i e_i) = \sum x_i \psi(e_i)$. Проверим, что ψ линейно. Если $u_1 = \sum x_i e_i$ и $u_2 = \sum y_i e_i$, то $u_1 + u_2 = \sum (x_i + y_i) e_i$. Имеем

$$\psi(u_1 + u_2) = \psi\left(\sum (x_i + y_i) e_i\right) = \sum (x_i + y_i)\psi(e_i) = \\ = \sum x_i \psi(e_i) + \sum y_i \psi(e_i) = \psi(u_1) + \psi(u_2).$$

$$\psi(\lambda u_1) = \psi\left(\sum \lambda x_i e_i\right) = \sum \lambda x_i \psi(e_i) = \lambda \sum x_i \psi(e_i) = \lambda \psi(u_1).$$

Матрица $\to$ отображение. Пусть наоборот, даны базисы $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ в U и $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ в V и матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$. Тогда существует единственное линейное отображение $\varphi\colon U \to V$ такое, что $A = M(\varphi, e, f)$. В самом деле, это отображение продолжает отображение $\varphi\colon \{e_1, \ldots, e_n\} \to V$, заданное по правилу

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j.$$

При этом, если $u = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = (e_1, \ldots, e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}f_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i\right) f_j\right)$$

То есть если $\varphi(u) = (f_1, \ldots, f_m)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Свойства операций над матрицами

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$
2) $A+0 = 0+A = A$
3) для каждой A есть $-A$ такая, что $A+(-A) = (-A)+A = 0$
4) $A+B = B+A$,
5) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,
6) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
8) $1 \cdot A = A$.

Таким образом с операциями сложения и умножения на число матрицы $m \times n$ образуют векторное пространство. Легко видеть, что базисом этого векторного пространства является набор матриц E_{ij}, где E_{ij} имеет один ненулевой элемент, он равен 1 и стоит на месте (i,j). Таким образом

$$\dim \mathrm{Mat}_{m,n} = mn.$$

Свойства операций над матрицами

9) $(AB)C = A(BC)$,
10) $\lambda(AB) = A(\lambda B) = \lambda(AB)$,
12) $A(B + C) = AC + BC$,
13) $(A + B)C = AC + BC$.
14) Для каждого n существует квадратная матрица

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,n}$ такая, что для любой матрицы
$A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$ и для любой матрицы $B \in \mathrm{Mat}_{n,k}$ выполнено
$AE = A$ и $EB = B$.

Вообще говоря $AB \neq BA$.

Доказательство ассоциативности произведения

I) матричное доказательство. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,k}$, $C \in \mathrm{Mat}_{k,l}$. Обозначим $AB = D$, $DC = F$, $BC = G$, $AG = H$.
Наша цель – доказать, что $f_{ij} = h_{ij}$.
Имеем
$d_{ip} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rp}$,
$f_{ij} = \sum_{p=1}^{k} d_{ip} c_{pj} = \sum_{p=1}^{k} \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rp} c_{pj}$.
С другой стороны
$g_{rj} = \sum_{p=1}^{k} b_{rp} c_{pj}$,
$h_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} g_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \sum_{p=1}^{k} b_{rp} c_{pj} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} a_{ir} b_{rp} c_{pj}$.

Доказательство ассоциативности произведения

II) доказательство на языке отображений.

$$(\varphi \circ \psi) \circ \xi(u) = (\varphi \circ \psi)(\xi(u)) = \varphi(\psi(\xi(u))).$$

$$\varphi \circ (\psi \circ \xi)(u) = \varphi((\psi \circ \xi)(u)) = \varphi(\psi(\xi(u))).$$

Связь с транспонированием.

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,

3) $(AB)^T = B^T A^T$.

Доказательство. Пусть A – матрица $m \times n$, B – матрица $n \times k$. Обозначим $AB = C$, $(AB)^T = C^T = D$, $A^T = P \in \mathrm{Mat}_{n,m}$, $B^T = Q \in \mathrm{Mat}_{k,n}$, $B^T A^T = QP = R$. Тогда

$$d_{ij} = c_{ji} = \sum_{s=1}^{n} a_{js} b_{si}.$$

$$r_{ij} = \sum_{s=1}^{n} q_{is} p_{sj} = \sum_{s=1}^{n} b_{si} a_{js}.$$

Порядок действий: $T, \lambda, \cdot, \pm$

Связь с рангом

Теорема.

$$\mathrm{rk}(A+B) \leq \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B.$$

Доказательство. Пусть $\{A_1, \ldots, A_r\}$ и $\{B_1, \ldots, B_s\}$ – базисы систем строк матриц A и B соответственно. Тогда каждая строка матрицы $A+B$ – это линейная комбинация строк $A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_s$. По ОЛЛЗ базис системы строк матрицы $A+B$ не может быть больше, чем из $r+s$ векторов.

Замечание.

Данная оценка достигается. Например,

$$\mathrm{rk}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2 = 1 + 1 = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача

Докажите, что $\mathrm{rk}(A+B) \geq |\mathrm{rk}\, A - \mathrm{rk}\, B|$.

Лемма.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_i a_{i1} & \dots & \lambda_i a_{in}\end{pmatrix}.$$

Следствие.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & \lambda_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i A_i.$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m}\begin{pmatrix}0\\ A_i\\ 0\end{pmatrix}$$

Лемма.

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} & \dots & A^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A^{(i)}.$$

Получена следующее утверждение.

Предложение.

Столбцы матрицы AB – это линейные комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами из столбцов матрицы B. Строки матрицы AB – это линейные комбинации строк матрицы B с коэффициентами из строк матрицы A.

Доказательство. При умножении матрицы A на матрицу B, матрица A умножается на каждый столбец, а затем составляется матрица из полученных столбцов.
Аналогично, B умножается на каждую строку матрицы A, а затем составляется матрица из полученных строк.

Связь с рангом

Теорема.

$$\mathrm{rk}(AB) \leq \min\{\mathrm{rk}\, A, \mathrm{rk}\, B\}.$$

Доказательство. Так как столбцы AB – это линейные комбинации столбцов A, то базис системы столбцов матрицы AB выражается через базис системы столбцов матрицы A. Если бы в базисе системы столбцов матрицы AB было бы больше элементов, чем в базисе системы столбцов матрицы A, мы бы получили противоречие с ОЛЛЗ. Таким образом, $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}\, A$.
Второе неравенство доказывается аналогично.

Задача.

Пусть A – матрица $m \times n$ и B – матрица $n \times k$. Тогда $\mathrm{rk}(AB) \geq \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B - n$.

Определение

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$. Матрица $B \in \mathrm{Mat}_{n,m}$ называется <u>левой обратной к матрице A</u>, если $BA = E(= E_n)$. Если такая матрица существует, будем говорить, что матрица A <u>обратима слева</u>.
Матрица $C \in \mathrm{Mat}_{n,m}$ называется <u>правой обратной к матрице A</u>, если $A = E(= E_m)$. Если такая матрица существует, будем говорить, что матрица A <u>обратима справа</u>.

Теорема.

Левая обратная к матрице A существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}\, A = n$. Если $m = n$ и левая обратная к матрице A существует, то она единственна. Правая обратная к матрице A существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}\, A = m$. Если $m = n$ и правая обратная к матрице A существует, то она единственна.

Доказательство. (не успели на лекции)

Рассмотрим матрицу BA. Если $\operatorname{rk} A < n$, то $\operatorname{rk} AB \leq \operatorname{rk} A < n$. Простиворечие с тем, что $\operatorname{rk} E_n = n$. Пусть теперь $\operatorname{rk} A = n$. Тогда строки A – это полная система в $\mathbb{R}^n$. Строки матрицы BA – это линейные комбинации строк A с коэффициентами из строк B. Мы можем подобрать i-ю строку B так, чтобы линейная комбинация строк A с такими коэффициентами равнялась $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Если так сделать со всеми строками B, получим $BA = E$.

Если же добавить еще условие $m = n$, то строки A – это не только полная система, но и базис $\mathbb{R}^n$. А значит, строка $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ выражается через них единственным образом. То есть матрица B определена однозначно.

Второе утверждение может быть доказано аналогично.