кольца, алгебры, идеалы, факторкольца

Определение 1. Элементы $a, b \neq 0$ кольца R называются делителями нуля, если $ab = 0$.

Элемент $r \in R$ называется нильпотентным, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $r^n = 0$.

Кольцо без делителей нуля называется целостным (областью целостности).

Кольцо с однозначным разложением на неприводимые множители называется факториальным.

Определение 2. Алгебра – это кольцо R, являющееся векторным пространством над некоторым полем F, причём $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ для любых $a, b \in R, \lambda \in F$.

Задача 1. Докажите, что множество подмножеств данного множества M с операциями симметрической разности и пересечения является кольцом. Найдите там все обратимые элементы, делители нуля и нильпотентные элементы.

Задача 2. Найти все обратимые элементы, делители нуля и нильпотенты в следующих кольцах:

а) $\mathbb{Z}_n$

б) верхнетреугольные матрицы над полем

в) квадратные матрицы порядка 2 над $\mathbb{R}$

г) функции на отрезке

д) непрерывные функции на отрезке

Задача 3. Докажите, что конечномерная алгебра с единицей и без делителей нуля над $\mathbb{C}$ изоморфна $\mathbb{C}$.

Задача 4. Перечислите все с точностью до изоморфизма коммутативные двумерные алгебры над $\mathbb{C}$

а) с единицей

б) не обязательно с единицей

Задача 5. Перечислите все с точностью до изоморфизма коммутативные двумерные алгебры над $\mathbb{R}$

а) с единицей

б) не обязательно с единицей

Определение 3. Подмножество I в кольце R называется левым (правым) идеалом, если это подгруппа по сложению и $\forall i \in I, r \in R$: $ri \in I$ ($ir \in I$).

Если I – и левый, и правый идеал, то I – двусторонний идеал.

Идеал алгебры – идеал кольца, являющийся векторным подпространством.

Идеал, не совпадающий со всем кольцом (то есть собственный) и не содержащийся ни в каком большем собственном идеале называется максимальным.

Идеал, в котором из того, что $ab \in I$ следует, что либо $a \in I$, либо $b \in I$, называется простым.

Задача 6. Найти все левые/правые/двусторонние идеалы в кольце квадратных матриц над полем.

Определение 4. Пусть R – кольцо, а I – двусторонний идеал. Множество смежных классов $r + I$ с операциями $(r_1 + I) + (r_2 + I) = r_1 + r_2 + I$, $(r_1 + I) \cdot (r_2 + I) = r_1 \cdot r_2 + I$ называется *факторкольцом* R/I.

Теорема 1. *Пусть задан гомоморфизм колец* $\varphi\colon R \to S$. *Тогда* $\mathrm{Ker}\varphi$ *– идеал в* R *и* $R/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$.

Задача 7. Доказать, что фактор кольцо по простому идеалу – область целостности, а по максимальному – поле.

Задача 8. Найти все идеалы колец а) $\mathbb{Z}$, б) $F[x]$, где F – поле.

Задача 9. Образуют ли идеал все необратиые элементы кольца
а) $\mathbb{Z}$
б) $\mathbb{C}[x]$
в) $\mathbb{R}[x]$
г) $\mathbb{Z}_n$

Задача 10. Найти все простые и максимальные идеалы в кольцах
а) $\mathbb{Z}$
б) $\mathbb{C}[x]$
в) $\mathbb{R}[x]$
г) $\mathbb{Z}_n$

Определение 5. Идеал, порождённый множеством элементов S – это минимальный идеал, содержащий S. Обозначается (S).

Идеал (a), где $a \in R$ называется главным.

Кольцо называется кольцом главных идеалов, если все идеалы в нём главные.

Задача 11. Докажите, что $(S) = \{\sum r_i s_i \mid r_i \in R, s_i \in S\}$.

Задача 12. Докажите, то кольца $\mathbb{Z}$ и $F[x]$ – кольца главных идеалов, а $\mathbb{Z}[x]$ и $F[x, y]$ – нет.

Задача 13. Докажите, что $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$.

Задача 14. а) Какие из следующих алгебр изоморфны?
$\mathbb{C}[x]$
$\mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2)$
$\mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y^2)$
$\mathbb{C}[x, y]/(x - y^2)$
$\mathbb{C}[x, y]/(y^2)$
б) тот же вопрос, если $\mathbb{C}$ везде заменить на $\mathbb{R}$.