

Поля.

Задача 1. Постройте граф включений подполей поля $\mathbb{F}_{1024}$.

Задача 2. Постройте явно поле из 9 элементов.

Задача 3. В поле $\mathbb{F}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ произведите следующие вычисления:

$$\frac{x}{x+1} - \frac{(x+1)^2}{x}$$

Задача 4. Найти неприведимый многочлен f степени 2 над полем $\mathbb{F}_3$. Сколько элементов в поле $\mathbb{F}_3[x]/(f)$? Выполнить действие

$$(x+1+(f))(x+1+(f)) - \frac{x+(f)}{x+2+(f)}.$$

Задача 5. Установите изоморфизм между полями $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x^2+1)$ и $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x+1)$.

Задача 6. Пусть $q = p^n$. Докажите, что в поле $\mathbb{F}_q$ каждый элемент имеет ровно один корень p -ой степени.

Задача 7. Докажите, что каждое отображение $\mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$ задается многочленом.

Задача 8. Докажите, что группа автоморфизмов поля $\mathbb{F}_q$ порождается автоморфизмом Фробениуса. Каков порядок этой группы.

Задача 9. Докажите, что у полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ нет нетождественных автоморфизмов. Предъявите нетождественный автоморфизм поля $\mathbb{C}$.

Задача 10. Какова степень расширения поля разложения $x^3 - 2$ над $\mathbb{Q}$?

Задача 11. Какой минимальный многочлен у элемента $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$?

Задача 12. Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Пусть есть простое p такое, что оно не делит a_n , p делит остальные a_i , p^2 не делит a_0 . Докажите, что f неприводим над $\mathbb{Q}$.