Листок 3. Автоморфизмы.

Определение 1. Пусть G – группа. *Эндоморфизмом* группы G называется гомоморфизм $\varphi\colon G \to G$. ґ*Автоморфизм* группы G – это биективный эндоморфизм, то есть изоморфизм $\varphi\colon G \to G$.

Задача 1. Какие структуры образуют множества $\mathrm{End}(G)$ и $\mathrm{Aut}(G)$ всех эндоморфизмов и автоморфизмов G соответственно с операцией композиции?

Задача 2. Опишите все эндоморфизмы и автоморфизмы группы
а) $\mathbb{Z}$,
б) $\mathbb{Z}_n$.
Чему при этом изоморфны $\mathrm{End}(G)$ и $\mathrm{Aut}(G)$?

Задача 3. Пусть группы G и H изоморфны. Докажите, что существует ровно $|\mathrm{Aut}(G)|$ различных изоморфизмов $G \to H$.

Задача 4. а) Опишите явно все изоморфизмы между $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$ и $\mathbb{Z}_4$.
б) $*$ Для каких n группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ циклическая?

Задача 5. Пусть g – элемент группы G. Рассмотрим отображение $\varphi_g\colon G \to G$, $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$.
а) докажите, что φ_g – автоморфизм. (Такие автоморфизмы называются *внутренними.*)
б) докажите, что все внутренние автоморфизмы образуют подгруппу $\mathrm{Inn}(G)$ в $\mathrm{Aut}(G)$.
в) докажите, что $\mathrm{Inn}(G)$ нормальна в $\mathrm{Aut}(G)$.
г) докажите, что $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$.

Задача 6. Докажите, что $\mathrm{Aut}(S_3) = \mathrm{Inn}(S_3) \cong S_3$.

Задача 7. а) $*$ Докажите, что при $n \neq 6$ выполняется $\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Inn}(S_n)$.
б) $*$ Приведите пример внешнего автоморфизма S_6.

Задача 8. Сколько элементов в
а) $\mathrm{Inn}(D_n)$?
б) $\mathrm{Aut}(D_n)$?

Задача 9. Чему изоморфна группа $\mathrm{Aut}(D_4)$?

Задача 10. Чему изоморфна группа $\mathrm{Aut}(Q_8)$?

Определение 2. Подгруппа $H \subset G$ называется *характеристической*, если она сохраняется (не поэлементно, а в целом как множество) при любом автоморфизме группы G.

Задача 11. а) Докажите, что любая характеристическая подгруппа нормальна.
б) Приведите пример характеристической подгруппы.
в) Приведите пример нормальной, но не характеристической подгруппы.