Листок 6. Абелевы группы.

Задача 1. Пусть A – свободная абелева группа с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$. И пусть B – ее подгруппа, порожденная y_1, y_2 и y_3. Найдите, чему изоморфна фактор-группа G/H, если

а)
$$\begin{cases} y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3; \\ y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3; \\ y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3 \\ y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3; \\ y_2 = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3 \\ y_3 = 5x_1 + 4x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

Задача 2. а) В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$ по подгруппе B, порожденной элементами $x_1 + x_2 + 4x_3$ и $2x_1 - x_2 + 2x_3$, найти порядок смежного класса $(x_1 + 2x_3) + B$.

б) В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$ по подгруппе B, порожденной элементами $2x_1 + x_2 - 50x_3$ и $4x_1 + 5x_2 + 60x_3$, найти порядок элемента $(32x_1 + 31x_2) + B$.

Задача 3. Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$?

Задача 4. Разбить на классы изоморфных групп $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{50}$, $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{40}$, $\mathbb{Z}_{3600}$ и $\mathbb{Z}_{40} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{30}$.

Задача 5. а) Перечислить с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка 200. б) Сколько с точностью до изоморфизма абелевых групп порядка n? (Не совсем хороший ответ. То есть не в элементарных функциях.)

Задача 6. Сколько элементов порядка

а) 2, 4 и 6 в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$?

б) 2, 4 и 5 в $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$?

Задача 7. Есть ли в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{16}$ подгруппа, изоморфная

а) $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$?

б) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$?

Задача 8. Сколько подгрупп порядка 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?

Задача 9. Пусть A – конечная абелева группа, порядок которой делится на натуральное число m. Докажите, что в A есть подгруппа порядка m.

Задача 10. Найти разложение на примарные циклические группы

$$\left(\langle a\rangle_9 \oplus \langle b\rangle_{27}\right)/\langle 3a+9b\rangle$$

Задача 11. Изоморфны ли группы

$$\left(\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4\right)/\langle 2b\rangle \qquad \text{и} \qquad \left(\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4\right)/\langle a+2b\rangle?$$