

Листок 7.

Задача 1. Чему изоморфна группа $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$?

Задача 2. а) Каково условие на два элемента (a_1, \dots, a_n) и (b_1, \dots, b_n) из \mathbb{Z}^n , при котором существует $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$, переводящий один элемент в другой?

б) Придумайте алгоритм, который выясняет, существует ли автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$, переводящий набор целочисленных векторов v_1, \dots, v_k в другой набор w_1, \dots, w_k .

Задача 3. Верно ли, что множество коммутаторов данной группы всегда замкнуто относительно

- а) взятия обратного?
- б) произведения?

Задача 4. Найдите коммутанты групп

- а) S_n
- б) A_4
- в) SL_n
- г) GL_n
- д) D_n
- е) Q_8
- ж) верхнетреугольных матриц $n \times n$ над полем
- з) обратимых верхнетреугольных матриц $n \times n$ над \mathbb{Z}_k

Задача 5. а) Верно ли, что $(G \times H)' = G' \times H'$?

б) Что можно сказать про коммутант полупрямого произведения?

Задача 6. Верно ли, что если H – подгруппа в G , то $|H/H'| < |G/G'|$?

Задача 7. Существует ли не простая группа G такая, что $G' = G$?

Задача 8. Пусть A – абелева группа, а G – произвольная группа. Докажите, что существует биекция между гомоморфизмами $G \rightarrow A$ и гомоморфизмами $G/G' \rightarrow A$.

Задача 9. Опишите все гомоморфизмы

- а) $S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$.
- б) $A_4 \rightarrow \mathbb{Z}_3$.
- в) $A_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2$.
- г) $D_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$.

Задача 10. Приведите пример разрешимой группы ступени 7.

Задача 11. Докажите, что

- а) всякая подгруппа разрешимой группы разрешима;
- б) всякая факторгруппа разрешимой группы разрешима;
- в) если G и H – разрешимые группы, то $G \times H$ – разрешимая группа;
- г) если $G/H \cong N$ и группы H и N разрешимы, то G разрешима.

Задача 12. Докажите, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда существует ряд вложенных подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots$$

таких, что H_{i+1} нормальна в H_i и H_{i+1}/H_i – циклическая группа простого порядка.

Задача 13. Докажите, что группа невырожденных верхнетреугольных матриц $n \times n$ разрешима.

Задача 14. Разрешимы ли группы

- а) S_n
- б) A_n
- в) SL_n
- г) GL_n
- д) D_n
- е) Q_8