

ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ.

Определение 1. Действием группы G на множестве X называется отображение $\alpha: G \times X \rightarrow X$ со свойствами:

- 1) $\alpha(e, x) = x$;
 - 2) $\alpha(h, \alpha(g, x)) = \alpha(hg, x)$.
- Обозначение $\alpha(g, x) = g \cdot x$.

Определение 2. Орбита элемента x при действии группы G – это множество $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

Стабилизатор элемента x – это $G_x = \text{St}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Задача 1. Докажите, что G_x – подгруппа в G .

Задача 2. Пусть $G_x = H$. Каков стабилизатор $y = g \cdot x$?

Задача 3. Пусть G – группа операторов, действующая на n -мерном пространстве. Найдите орбиты, выберите представители и найдите их стабилизаторы, если

- a) $G = \text{GL}_n$;
- b) $G = \text{O}_n$ – группа ортогональных матриц;
- в) группа невырожденных диагональных матриц;
- г) группа невырожденных верхнетреугольных матриц.

Задача 4. Пусть $G = \text{GL}_n$ действует на множестве k -мерных подпространств в n -мерном пространстве. Найдите орбиты.

Задача 5. Пусть F – множество цепочек $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$, где $\dim(V_i) = i$. Найдите орбиты действия GL_n на F , выберите представители и найдите стабилизаторы.

Задача 6. Описать орбиты $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ на множестве комплексных матриц $n \times n$ сопряжениями.

Задача 7. Пусть $G = \text{GL}(\mathbb{R})$ – группа невырожденных линейных преобразований n -мерного вещественного пространства. Рассмотрим действие

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

на множестве квадратичных функций. Докажите, что это действие и найдите орбиты.

Теорема 1. Пусть на множестве X действует конечная группа G . Тогда для любого $x \in X$ выполнено:

$$|Gx| \cdot |\text{St}(x)| = |G|.$$

Задача 8. Сколько элементов в группе симметрий

- a) куба,
- б) икосаэдра?

Задача 9. Можно ли перевести правильный додекаэдр в себя путем вращения вокруг какой-либо оси на $\frac{2\pi}{7}$?

Теорема 2. (Лемма Бернсайда) Пусть на множестве X действует конечная группа G . Обозначим

$$X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}.$$

Тогда количество орбит равно

$$X/G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X^g.$$

Задача 10. Бусы состоят из 3-х черных и 4-х белых бусин на круглой нитке. Бусины можно двигать по нитке (не меняя порядок) и можно переворачивать всю нитку. Сколько существует видов бус, не переводящихся друг в друга такими операциями?

Задача 11. а) Сколько существует различных (не переводящихся друг в друга вращениями) способов покрасить грани куба в 2 цвета?

б) Тот же вопрос про вершины.