

ТЕОРЕМЫ СИЛОВА.

Задача 1. Сколько элементов в группе

- а) $GL_n(\mathbb{Z}_p)$?
- б) $SL_n(\mathbb{Z}_p)$?

Задача 2. Докажите, что силовская p -подгруппа нормальна тогда и только тогда, когда она единственная.

Задача 3. Докажите, что любая группа порядка

- а) 15 б) 35 в) 185 г) 255
- коммутативна.

Задача 4. Докажите, что не существует простых групп порядка

- а) 36 б) 80 в) 56 г) 196 е) 200

Задача 5. Докажите, что группы порядка

- а) 20 б) 12 в) p^2q г) 42 е) 100
- разрешимы.

Задача 6. Сколько элементов порядка 7 в простой группе порядка 168?

Задача 7. Пусть p – простое число.

- а) Найдите порядок силовской p -подгруппы в S_n .
- б) Сколько силовских p -подгрупп в S_p ?

Задача 8. Сколько силовских 3-подгрупп в S_6 ?

Задача 9. Сколько силовских 2-подгрупп в S_6 ?

Задача 10. * Сколько существует неизоморфных групп порядка pq (ответ дать для всех пар различных простых чисел p и q).

Задача 11. * Пусть p , q и r – различные простые числа.

- а) Докажите, что группа порядка pqr разрешима,
- б) Докажите, что неразрешимая группа порядка p^2qr изоморфна A_5 .

Задача 12. * Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем F характеристики p . И пусть G – это p -подгруппа в $GL(V)$. Докажите, что существует такой вектор $v \in V$, что $g(v) = v$ для всех $g \in G$.