

ЛЕКЦИЯ 11

Следствие 1 (из теоремы Гамильтона-Кэли и Предложения 1 предыдущей лекции). Пусть S — R -алгебра, $s \in S$. Тогда s целый над R тогда и только тогда, когда существует конечно порождённый R -модуль N и конечно порождённый S -модуль M , содержащий s , такие что:

- (i) не существует $\tilde{s} \neq 0 \in S$ такого, что $\tilde{s}M = 0$,
- (ii) $sM \subseteq M$.

В частности, s целый над R тогда и только тогда, когда $R[s]$ — конечно порождённый R -модуль.

Доказательство. $\Rightarrow$: Положим $N = S$, $M = R[s]$. По предположению, s целый над R , то есть существует унитарный многочлен

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in R[x]$$

такой, что $p(s) = 0$. Тогда элементы $1, s, \dots, s^{n-1}$ порождают $R[s]$ как R -модуль по предложению 1 с предыдущей лекции. Значит, $M = R[s]$ — конечно порождённый R -модуль.

Проверим условия: (i) Если $\tilde{s} \in S$, $\tilde{s} \neq 0$, и $\tilde{s}M = 0$, то $\tilde{s} \cdot 1 = 0$, значит, $\tilde{s} = 0$. Противоречие. Следовательно, условие (i) выполнено. (ii) $sM = s \cdot R[s] \subseteq R[s] = M$ — очевидно.

$\Leftarrow$: Пусть существует конечно порождённый R -модуль M и конечно порождённый S -модуль N , содержащие s , такие что выполнены условия (i) и (ii). Рассмотрим отображение $\varphi(m) = s \cdot m$ — эндоморфизм M как R -модуля (поскольку $sM \subseteq M$). По теореме Гамильтона-Кэли, существует унитарный многочлен $p(x) \in R[x]$ такой, что $p(\varphi) = 0$. Тогда $p(\varphi)(m) = p(s) \cdot m = 0$ для любого $m \in M$. В частности, если $m \in M$, $m \neq 0$, то $p(s) \cdot m = 0$. Но по условию (i), не существует ненулевого $\tilde{s} \in S$ такого, что $\tilde{s}M = 0$. Следовательно, $p(s) = 0$, то есть s целый над R .

В частности: Если s целый над R , то $R[s]$ — конечно порождённый R -модуль (как показано выше). Обратно, если $R[s]$ — конечно порождённый R -модуль, то положим $M = R[s]$, $N = S$. Тогда:

- (i) $\forall \tilde{s} \in S$, $\tilde{s} \neq 0$: $\tilde{s} \cdot 1 = \tilde{s} \neq 0$, значит, $\tilde{s}M \neq 0$.
- (ii) $sM = s \cdot R[s] \subseteq R[s] = M$.

Следовательно, по доказанному, s целый над R . □

Теорема 1. Пусть R — кольцо, S — R -алгебра. Тогда множество целых над R элементов в S образует подалгебру в S . В частности, если S порождена целыми элементами (как алгебра), то S целая.

Доказательство. Нужно доказать: если s_1, s_2 — целые над R , то $s_1 + s_2$ и $s_1 s_2$ также являются целыми над R .

Дадим два доказательства: первое только для случая, когда R — нетерово кольцо, второе же проходит для случая, когда R — произвольное кольцо. (Естественно, можно сразу воспользоваться вторым доказательством и не обращать внимание на первое. Тут оно приведено, так как кажется очень простым и естественным рассуждением.)

Доказательство для R — нетерова. Пусть s_1, s_2 — целые над R . Тогда $R[s_1]$ — конечно порождённый R -модуль (по доказанному). Аналогично, $R[s_1, s_2] = R[s_1][s_2]$ — конечно порождённый $R[s_1]$ -модуль (поскольку s_2 целый

над R , значит, целый и над $R[s_1]$, а значит, конечно порождённый R -модуль. Тогда $R[s_1 + s_2] \subseteq R[s_1, s_2]$ — конечно порождённый R -модуль (как подмодуль конечно порождённого модуля над нетеровым кольцом). Следовательно, $s_1 + s_2$ целый над R . Аналогично для $s_1 s_2$.

Доказательство для общего случая. Пусть $M = R[s_1]$, $M' = R[s_2]$ — конечно порождённые R -модули (поскольку s_1, s_2 целые над R).

Тогда $MM' \subseteq S$ — R -подмодуль. Покажем, что существует конечный набор образующих этого модуля. Пусть $m_1, \dots, m_k$ — образующие M как R -модуля, $m'_1, \dots, m'_\ell$ — образующие M' как R -модуля. Тогда элементы $m_i m'_j$ порождают MM' как R -модуль (поскольку любой элемент $mm' \in MM'$ записывается как $\sum r_{ij} m_i m'_j$). Следовательно, MM' — конечно порождённый R -модуль.

Мы собираемся воспользоваться следствием 1 для $N := S$ и $M := MM'$. При этом в роли элемента s из следствия 1 будут выступать элементы $s_1 + s_2$ и $s_1 s_2$. Проверим условия:

Допустим $\tilde{s}(MM') = 0$. Тогда для любых $m \in M$ и $m' \in M$ имеем $\tilde{s}mm' = 0$. В частности, для $m = m' = 1$ получаем $\tilde{s} = 0$.

$$(s_1 s_2)MM' = s_1 M \cdot s_2 M' \subseteq MM' \quad (s_1 M \subseteq M, s_2 M' \subseteq M')$$

$$(s_1 + s_2)MM' = s_1 MM' + s_2 MM' = (s_1 + s_2)MM' = s_1 MM' + M s_2 M' \subseteq MM'.$$

Итак, условия следствия 1 выполнены, поэтому $s_1 s_2$ и $s_1 + s_2$ — целые.

Таким образом, множество целых элементов замкнуто относительно сложения и умножения, и содержит R . Значит, оно образует подалгебру в S .

В частности: Если S порождена целыми элементами, то любой элемент $s \in S$ — это многочлен от целых элементов (поражающих), и по доказанному — сам целый. Следовательно, S целая. $\square$

Следствие 2 (из теоремы Гамильтона–Кэли). Пусть M — конечно порождённый R -модуль, $I \triangleleft R$ — идеал, такой что $IM = M$. Тогда существует элемент $a \in I$, такой что $(a - \text{id})M = 0$, то есть $am = m$ для любого $m \in M$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi = \text{id} : M \rightarrow M$ — тождественный эндоморфизм. Так как $IM = M$, то $\varphi(M) = M \subseteq IM$. По теореме Гамильтона–Кэли, существует унитарный многочлен $p(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$, где $p_j \in I^j$, такой что $p(\varphi) = 0$. То есть:

$$p(\text{id}) = \text{id}^n + p_1 \text{id}^{n-1} + \dots + p_n \text{id} = 0.$$

Применим это к произвольному элементу $m \in M$:

$$p(\text{id})(m) = (\text{id} + p_1 \text{id} + \dots + p_n \text{id})(m) = (1 + p_1 + \dots + p_n)(m) = 0.$$

Значит, $(1 + p_1 + \dots + p_n) \cdot m = 0$ для любого $m \in M$. Положим $a = -(p_1 + \dots + p_n)$. Тогда $a \in I$ (поскольку каждый $p_j \in I^j \subseteq I$), и:

$$(a - \text{id})m = am - m = -(p_1 + \dots + p_n)m - m = -(1 + p_1 + \dots + p_n)m = 0.$$

Следовательно, $(a - \text{id})M = 0$, то есть $am = m$ для любого $m \in M$. $\square$

Определение 1. Радикал Джекобсона кольца R — это

$$\text{Jас}(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ — максимальный идеал}} \mathfrak{m}.$$

Лемма 1.

$$\text{Jас}(R) = \{x \in R : 1 - xy \text{ — обратим для любого } y \in R\}.$$

Доказательство. $\boxed{\supseteq}$: Пусть $x \notin \text{Jас}(R)$. Тогда существует максимальный идеал $\mathfrak{m}$ такой, что $x \notin \mathfrak{m}$. Рассмотрим факторкольцо $R/\mathfrak{m}$ — поле. Тогда $x + \mathfrak{m} \neq 0 + \mathfrak{m}$, значит, существует элемент $y + \mathfrak{m} \in R/\mathfrak{m}$ такой, что $(x + \mathfrak{m})(y + \mathfrak{m}) = 1 + \mathfrak{m}$. То есть $(xy) + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}$, откуда $xy - 1 \in \mathfrak{m}$. Следовательно, $1 - xy$ не обратим (так как содержится в максимальном идеале). Таким образом, если $x \notin \text{Jас}(R)$, то существует $y \in R$ такое, что $1 - xy$ не обратим.

$\boxed{\subseteq}$: Пусть $1 - xy$ не обратим для некоторого $y \in R$. Тогда идеал $(1 - xy)$ не равен R , значит, он содержится в некотором максимальном идеале $\mathfrak{m}$. То есть $1 - xy \in \mathfrak{m}$. Если $x \in \mathfrak{m}$, то $1 = (1 - xy) + xy \in \mathfrak{m}$ — противоречие. Значит, $x \notin \mathfrak{m}$. Следовательно, $x \notin \text{Jас}(R)$.

Следовательно, $x \in \text{Jас}(R)$ тогда и только тогда, когда $1 - xy$ обратим для любого $y \in R$. $\square$

Лемма 2 (Накаямы). Пусть $I \triangleleft R$, $I \subseteq \text{Jас}(R)$, M — конечно порождённый R -модуль. Тогда:

- а) Если $IM = M$, то $M = \{0\}$.
- б) Образы элементов $m_1, \dots, m_n \in M$ в M/IM являются образующими тогда и только тогда, когда $m_1, \dots, m_n$ порождают M .

Доказательство. **а)** Пусть $IM = M$. Тогда по следствию 2 существует элемент $a \in I$ такой, что $(\text{id} - a)M = 0$, то есть $(1 - a)t = 0$ для любого $t \in M$. Но $a \in I \subseteq \text{Jас}(R)$, значит, $1 - a$ обратим (по определению радикала Джекобсона). Следовательно, умножая обе части на $(1 - a)^{-1}$, получаем $t = 0$ для любого $t \in M$. Значит, $M = \{0\}$.

б) ($\Leftarrow$): Очевидно — если $m_1, \dots, m_n$ порождают M , то их образы порождают M/IM .

($\Rightarrow$): Докажем $N = M/\sum_i Rm_i$ — это нулевой модуль. Рассмотрим

$$N/IN = M/(IM + \sum_i Rm_i)$$

Имеем: $M/(IM + \sum_i Rm_i)$ порождён образами $m_1, \dots, m_n$, а они все нулевые. Значит, $N/IN = 0$. Тогда по пункту а) $N = IN \Rightarrow N = 0 \Rightarrow M = \sum_i Rm_i \Rightarrow m_1, \dots, m_n$ — порождающие M . $\square$

Упражнение 1. Доказать: $M/IN = M/(IM + \sum_i Rm_i)$.

Следствие 3. Пусть M, N — конечно порождённые R -модули. Тогда:

$$M \otimes_R N = 0 \iff \text{ann}(M) + \text{ann}(N) = R.$$

В частности, если R — локальное кольцо (то есть имеет единственный максимальный идеал), то:

$$M \otimes_R N = 0 \iff \begin{cases} M = 0 \\ \text{или} \\ N = 0 \end{cases}$$

Пример 1. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3$. Имеем:

$$\text{ann}(\mathbb{Z}_2) = 2\mathbb{Z},$$

$$\text{ann}(\mathbb{Z}_3) = 3\mathbb{Z},$$

$2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, поскольку $\gcd(2, 3) = 1$. Следовательно, $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_3 = 0$.

Доказательство следствия 3. $\boxed{\Leftarrow}$. Пусть $m \otimes n$ — произвольный разложимый элемент в $M \otimes_R N$. По условию $1 = a + b$, где $a \in \text{ann } M$, $b \in \text{ann } N$. Тогда:

$$m \otimes n = 1(m \otimes n) = am \otimes n + bm \otimes n = 0 \otimes n + m \otimes bn = 0.$$

Значит, любой разложимый элемент нулевой, то есть $M \otimes_R N = 0$.

Импликация $\Leftarrow$ для утверждения "в частности" очевидно.

$\boxed{\Rightarrow}$ Сперва докажем утверждение для локального кольца, то есть то, что если для локального R выполнено $M \otimes N = 0$, то $M = 0$ или $N = 0$.

Пусть R — локальное кольцо с единственным максимальным идеалом P . Но M/PM — векторное пространство над полем R/P , и если оно ненулевое, то существует сюръекция:

$$M/PM \twoheadrightarrow R/P.$$

Естественная сюръекция: $M \rightarrow M/PM$. Тогда:

$$0 = M \otimes_R N \twoheadrightarrow R/P \otimes_R N \cong N/PN.$$

Следовательно, $N/PN = 0$, то есть $N = PN$, по лемме Накаямы имеем $N = 0$.

Аналогично, если $N/PN \neq 0$, то $M = 0$.

Таким образом, $M \otimes_R N = 0 \implies M = 0$ или $N = 0$.

Теперь выведем из доказанного общий случай (то есть первое утверждение). Пусть $\text{ann } N + \text{ann } M \neq R$. Тогда существует максимальный идеал P такой, что $\text{ann } N + \text{ann } M \subseteq P$. Локализация по P даёт:

$$M_P \otimes_{R_P} N_P = 0 \implies \begin{cases} M_P = 0 \\ \text{или} \\ N_P = 0 \end{cases}$$

по локальной версии (второму утверждению) следствия.

Но $M_P = 0 \iff \text{ann}(M_P) = R_P$, и $N_P = 0 \iff \text{ann}(N_P) = R_P$.

Поскольку $\text{ann}(M_P) = (\text{ann } M)_P$, а $\text{ann}(M) \subseteq P$, то $(\text{ann } M)_P \neq R_P$, значит, $M_P \neq 0$. Аналогично, $N_P \neq 0$. Противоречие. Следовательно, $\text{ann } N + \text{ann } M = R$.

□