## Лекция 13

**Определение 1.** $R$ - *кольцо Джекобсона*, если каждый простой идеал в $R$ является пересечением максимальных идеалов.

**Пример 1.**
(1) Поле $F$ — кольцо Джекобсона. Действительно, в поле единственный простой идеал — $\{0\}$, и он равен пересечению всех максимальных идеалов (а их также только один – нулевой).
(2) Кольцо $\mathbb{Z}$ - кольцо Джекобсона. Простые идеалы: $(p)$, где $p$ — простое число. Максимальные идеалы: тоже $(p)$. Значит, $(p) = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq (p)} \mathfrak{m} = (p)$. Условие выполнено.
(3) Кольцо $\mathbb{C}[x, y]_{(x,y)}$ — не кольцо Джекобсона. (Это локализация $\mathbb{C}[x, y]$ по максимальному идеалу $(x, y)$.) Рассмотрим простой идеал $(x)$ в этом кольце. Он не может быть представлен в виде пересечения максимальных идеалов, так как максимальный идеал в этой лдокализации один, но при этом $(x)$ не является максимальным.

**Лемма 1.** *Пусть $R$ — кольцо. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) *$R$ — кольцо Джекобсона.*
2) *Если $P \lhd R$ - простой идеал, $S = R/P$ и для любого ненулевого элемента $b \in S$ кольцо $S[b^{-1}]$ — поле $\Longrightarrow$ $S$ — поле.*

*Доказательство.* $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$

Пусть $R$ — кольцо Джекобсона. Тогда $S$ – кольцо Джекобсона. В самом деле, пусть $Q$ — простой идеал в $S$. Рассмотрим канонический гомоморфизм

$$\pi \colon R \to S = R/P.$$

Тогда $\pi^{-1}(Q)$ – простой идеал в $R$. Следовательно, $\pi^{-1}(Q)$ – это пересечение максимальных идеалов. Их образы при $\pi$ – максимальные идеалы, пересечение которых равно $Q$.

По определению кольца Джекобсона, каждый простой идеал является пересечением максимальных идеалов. Но нулевой идеал в $S$ прост, так как это область целостности. Получаем, что

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \lhd S \\ \mathfrak{m} \text{ — макс.}}} \mathfrak{m} = \bigcap_{\substack{Q \lhd S \\ Q \text{ — простой}}} Q = \{0\}.$$

Простые идеалы в $S[b^{-1}]$ соответствуют простым идеалам в $S$, которые не пересекаются с $\{b^k\}$. То, что $S[b^{-1}]$ — поле равносильно тому, что все простые идеалы в $S$, кроме $\{0\}$, содержат $b$. Это означает, что все максимальные идеалы, кроме $\{0\}$, в $S$ содержат $b$. Так как пересечение максимальных идеалов в $S$ равно $\{0\}$, то $\{0\}$ является максимальным идеалом. Следовательно, $S$ — поле .

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ Пусть $Q$ — простой идеал в $R$. Нам нужно показать, что $Q$ равен пересечению всех максимальных идеалов, содержащих $Q$:

$$I := \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \lhd R \\ \mathfrak{m} \supseteq Q \\ \mathfrak{m} \text{ — макс.}}} \mathfrak{m} \overset{?}{=} Q.$$

Предположим противное: $I \neq Q$, то есть $I \supset Q$. Возьмём элемент $f \in I \setminus Q$. По лемме Цорна существует простой идеал $P$, который является максимальным среди всех простых идеалов, содержащих $Q$ и не содержащих $f$.

Рассмотрим факторкольцо $S = R/P$. Оно является областью целостности, и элемент $b = f + P \in S$ ненулевой (поскольку $f \notin P$). Если $P$ не является максимальным идеалом, то $S = R/P$ — не поле. Рассмотрим кольцо $R[f^{-1}]$. В этом кольце идеал $P[f^{-1}]$ является максимальным среди простых идеалов, а следовательно, максимальным. Тогда локализация $S[b^{-1}]$ (которая изоморфна $(R/P)[f^{-1}] = R[f^{-1}]/P[f^{-1}]$) является полем. Но по условию (2), если $S[b^{-1}]$ — поле, то $S$ должно быть полем. Если $S = R/P$ — поле, то $P$ — максимальный идеал. Если $P$ максимальный, то $f \in P$, поскольку $f$ принадлежит всем максимальным идеалам, содержащим $Q$ (так как $f \in I$). Но мы выбрали $f \notin P$. Здесь возникает противоречие. Таким образом, наше первоначальное предположение, что $I \neq Q$, неверно. Следовательно, $I = Q$, и $R$ — кольцо Джекобсона. $\square$

**Теорема 1** (Гильберта о нулях)**.** *Пусть $R$ — кольцо Джекобсона, $S$ — конечно порождённая $R$-алгебра. Тогда $S$ — кольцо Джекобсона. Кроме того, если идеал $\mathfrak{n} \triangleleft S$ максимальный, то $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap R$ — максимальный идеал в $R$, и $S/\mathfrak{n}$ — конечное расширение поля $R/\mathfrak{m}$.*

*Доказательство.* **Частный случай:** $R$ — поле, $S = R[x]$.
Любой простой идеал $P$ в $S$ имеет вид либо $P = (f)$, где $f$ — неприводимый многочлен или $P = (0)$. Если $P = (f)$, где $f$ неприводим, то $P$ — максимальный идеал (поскольку $R[x]$ — факториальное кольцо). Следовательно, он является пересечением максимальных идеалов.
Докажем, что

$$\{0\} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \triangleleft S \\ \mathfrak{m} \text{ — макс.}}} \mathfrak{m}.$$

Допустим, что это не так. Тогда

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \triangleleft S \\ \mathfrak{m} \text{ — макс.}}} \mathfrak{m} = (g).$$

Однако, Количество неприводимых многочленов бесконечно, иначе перемножим все и прибавим 1, получим многочлен, не раскладывающийся в произведение неприводимых. Значит, существует неприводимый многочлен $h$, не входящий в разложение $g$. Следовательно, $(g)$ не лежит в максимальном идеале $(h)$.

Итак, показано, что $S$ – кольцо Джекобсона.

Пусть $\mathfrak{n} \triangleleft S$ — максимальный идеал. Тогда $\mathfrak{n} = (f)$, где $f$ — неприводимый многочлен. Тогда $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap R = \{0\}$ — максимальный идеал в $R$ (поскольку $R$ — поле). При этом $R[x]/(f) = \langle \overline{1}, \overline{x}, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^{n-1} \rangle_R$, где $\deg f = n$, и $R = R/\mathfrak{m}$. Следовательно, $S/\mathfrak{n} = R[x]/(f)$ — конечное расширение поля $R/\mathfrak{m} = R$.

**Менее частный случай:** Пусть $R$ — кольцо Джекобсона, $S = R[s]$ – кольцо, порождённое над $R$ одним элементом.
Пусть $P \triangleleft S$ — простой идеал, и $S' = S/P$, и существует $b \neq 0$ такой, что $S'[b^{-1}]$ — поле. Надо показать, что $S'$ — поле. Тогда по лемме $S$ — кольцо Джекобсона.

Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} S & \supseteq & R \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ S' & \supseteq & R' \end{array}$$

Здесь $P \cap R$ — простой идеал в $R$, а $R' = R/(P \cap R)$ — область целостности (как фактор по простому идеалу). При этом $S'$ порождено над $R'$ одним элементом $t = \pi(s)$. Значит, $S' = R'[x]/Q$, где $Q$ — простой идеал в $R'[x]$, и отображение $R'[x] \to S'$ задаётся $x \mapsto t$.

Пусть $Q = 0$. Тогда $S' = R'[x]$. Положим $K = \mathrm{Quot}(R')$. Тогда $K[x][b^{-1}]$ — поле, поскольку $R'[x][b^{-1}] \subseteq K[x][b^{-1}]$ — поле, а значит $R'[x][b^{-1}] \supseteq K$, следовательно, $R'[x][b^{-1}] = K[x][b^{-1}]$. Но $K[x]$ — кольцо Джекобсона, и по частному случаю для идеала 0 имеем: если $K[x][b^{-1}]$ — поле, то $K[x]$ — поле, что неверно.

Следовательно, $Q \neq 0$. Тогда $S'[b^{-1}] \subseteq K[x]/QK[x]$.

Рассмотрим многочлен $p(x) \in Q \subseteq R'[x]$. Тогда $p(t) = 0$, и

$$p(t) = p_n t^n + \cdots + p_0 = 0.$$

Получаем, что $t$ — целый над $R'[p_n^{-1}]$, и следоваттельно, $S'[p_n^{-1}]$ — целое расширение $R'[p_n^{-1}]$, и $b \in S' \subseteq S'[p_n^{-1}]$, значит, $b^m + q_{m-1}b^{m-1} + \cdots + q_0 = 0$.

Пусть $\beta := b^{-1}$. Тогда:

$$q_0\beta^m + q_1\beta^{m-1} + \cdots + 1 = 0.$$

Значит, $\beta$ — целый над $R'[(p_n q_0)^{-1}]$, то есть:

$$S'[\beta] \text{ — целое расширение } R'[(p_n q_0)^{-1}].$$

По следствию 2 из предыдущей лекции, $R'[(p_n q_0)^{-1}]$ — поле, но $R'$ — кольцо Джекобсона, значит, по лемме 1 для нулевого идеала, $R'$ — поле.

Итак, $S' = R'[t]$, где $t$ удовлетворяет уравнению целой зависимости над $R'[p_n^{-1}]$, и $R'[p_n^{-1}] = R'$. Тогда $S' \supseteq R'$ — целое расширение. По следствию 2 из предыдущей лекции $S'$ — поле. В итоге доказано, что $S$ – кольцо Джекобсона.

Пусть $\mathfrak{n} \lhd S$ — максимальный идеал. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} S & \supseteq & R \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ S' & \supseteq & R' \end{array}$$

$R' = R/(\mathfrak{n} \cap R)$. Так как $\mathfrak{n}$ — максимальный идеал в $S$, то $S' = S/\mathfrak{n}$ — поле. Пусть $S' = R'[t] \cong R[x]/Q$.
Если $Q = 0$, то $R[x]$ — поле — неверно.
Если $Q \neq 0$, то $t$ — целый над $R'[p_n^{-1}]$, значит, поле $S'$ цело над $R'[p_n^{-1}]$. Следовательно, $R'[p_n^{-1}]$ — поле и $R'$ тоже (по лемме 1), и тогда $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap R$ — максимальный идеал.

Так как $Q \neq 0$, то $S'$ — конечное расширение (порождено одним элементом $t$ и алгебраически замкнуто).

**Общий случай:** $S = R[s_1, \ldots, s_n]$.
Тогда $R = R[s_1] \subset R[s_1, s_2] \subset \ldots$. Утверждение доказывается индукцией по количеству образующих.

□

Обозначим $\mathbb{A}^n$ — аффинное $n$-мерное пространство. Рассмотрим подмножество $X \subseteq \mathbb{A}^n$.

**Определение 2.** Пусть $I(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : f|_X \equiv 0\}$ Тогда

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$$

называется *алгеброй регулярных функций на* $X$.

**Следствие 1.** *1) Если $\mathbb{K}$ — поле, $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, то*

$$\mathfrak{m}_\mathfrak{p} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

*является максимальным идеалом в кольце $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.*

*2) Если $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, то любой максимальный идеал в $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ имеет вид $\mathfrak{m}_p/I(X)$, где $p = (a_1, \ldots, a_n)$, и $\mathfrak{m}_p = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$.*

*Доказательство.* $\boxed{1)}$: Пусть $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда:

$$f = \sum c_{i_1 \ldots i_n} (x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_n - a_n)^{i_n},$$

где $c_{i_1 \ldots i_n} \in \mathbb{K}$. Получаем $f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + h$, где $h \in (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Рассмотрим отображение:

$$\varphi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto f(a_1, \ldots, a_n) = c_0.$$

Тогда $\mathrm{Ker}(\varphi) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Следовательно,

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \cong \mathbb{K}.$$

Значит, $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ — максимальный идеал, так как $\mathbb{K}$ – поле. $\square$