# Лекция 15

Напомним, что на прошлой лекции мы ввели алгебру раздутия, соответствующую $I$-фильтрации
$$\xi\colon R \supseteq I \supseteq I^2 \supseteq \ldots$$
Эта алгебра определялась как
$$B_I R = R \oplus tI \oplus t^2 I^2 \oplus \ldots$$

Мы дадим несколько неформальную (и возможно не очень хорошо понятную без некоторых знаний по алгебраической геометрии) геометрическую интерпретацию данного объекта.

Определим следующую геометрическую конструкцию, связанную с данной алгеброй. Пусть $X$ – алгебраическое множество (аффинное алгебраическое многообразие). И пусть алгебра регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ порождена элементами $f_1, \ldots, f_k$. Рассмотрим алгебраическое подмножество $Y$ в $X$. Идеал $I(Y)$ содержит идеал $I(X)$ и потому $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I(Y) = \mathbb{K}[X]/I$ для некоторого идеала $I$. Пусть идеал $I$ порождается элементами $g_0, \ldots, g_s$.

Рассмотрим гомоморфизм
$$\varphi\colon \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_s] \to \mathbb{K}[X][t],$$
заданный с помощью $\varphi(x_i) = f_i$, $\varphi(y_j) = tg_j$. Образ этого гомоморфизма – это $B_I\mathbb{K}[X]$. Его ядро $J = \operatorname{Ker}\varphi$ порождается однородными по $y_0, \ldots, y_s$ многочленами. Рассмотрим произведение аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$ и проективного пространства с однородными координатами $y_0, \ldots, y_s$. Пусть $Z$ – множество нулей идеала $J$ в этом произведении $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^s$.

**Определение 1.** Многообразие $Z$ называется *раздутием* $X$ с цетром в $Y$.

Пусть $\pi\colon \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^s \to \mathbb{A}^n$ – проекция на первый сомножитель. Тогда $\pi(Z) \subseteq X$. В самом деле, пусть $((a_1, \ldots, a_n), [b_0 : \ldots : b_s]) \in Z$. Тогда для любого $f \in J$ выполнено $f(a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_s) = 0$. В том числе для любого многочлена $h(x_1, \ldots, x_n) \in I(X)$ имеем $h(f_1, \ldots, f_n) = 0$, следовательно, $h \in \operatorname{Ker}\varphi = J$. То есть $h(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Значит, $(a_1, \ldots, a_n) \in X$.

Пусть $(a_1, \ldots, a_n) \in X \setminus Y$. Тогда существует $j$ такое, что $g_j(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. В идеале $J$ лежат многочлены
$$g_i(x_1, \ldots, x_n)y_j - g_j(x_1, \ldots, x_n)y_i.$$
Это показывет, что у точки $(a_1, \ldots, a_n)$ существует единственный прообраз в $Z$ при $\pi$, а именно
$$((a_1, \ldots, a_n), [g_0(a_1, \ldots, a_n) : \ldots : g_s(a_1, \ldots, a_n)]).$$

Рассмотрим теперь $\pi^{-1}(Y)$. Это подмногообразие в $X \times \mathbb{P}^n$. Оно задано идеалом $I$ (в однородных многочленах на $\pi^{-1}(X)$, то есть в $B_I\mathbb{K}[X]$). Таким образом алгебра (однородных) многочленов на $\pi^{-1}(Y)$ – это
$$B_I\mathbb{K}[X]/IB_I\mathbb{K}[X] = \operatorname{gr}_I\mathbb{K}[X].$$

В итоге операцию раздутия мы можем себе представить так (несколько неформально): из многообразия $X$ вырезается многообразие $Y$, а на его место вклеивается проективное многообразие, заданное алгеброй однородных многочленов $\operatorname{gr}_I\mathbb{K}[X]$.

**Пример 1.** Рассмотрим раздутие аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ в точке $p = (a_1, \dots, a_n)$. Здесь $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $I = \mathfrak{m}_p = (x - a_1, \dots, x - a_n)$. При этом

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_p} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \oplus \dots \cong \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n].$$

Таким образом, вменсто точки при раздутии "вклеивается"$(n-1)$-мерное проективное пространство.

На этом геометрическая часть закончена, вернёмся к коммутативной алгебре.

**Предложение 1.** *Пусть $R$ – кольцо, $I \lhd R$ – идеал и $M$ – $R$-модуль. Пусть также*

$$\xi \colon M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$$

*есть $I$-фильтрация, причём все модули $M_j$ конечно порождены. Тогда фильтрация $\xi$ является $I$-стабильной тогда и только тогда, когда $B_I R$-модуль $B_\xi M$ является конечно порождённым.*

*Доказательство.* $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\xi$ – $I$-стабильная фильтрация. По определению, существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \geq N$ выполнено $M_{j+1} = IM_j$. Следовательно, для любого $k \geq 0$ выполнено $M_{N+k} = I^k M_N$. Рассмотрим объединение образующих $R$-модулей $M_0, M_1, \dots, M_N$. Покажем, что они порождают $B_I R$-модуль $B_\xi M$. В самом деле, рассмотрим все линейные комбинации с коэффициентами из $R \subseteq R \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots = B_I R$, мы получим все элементы из $M_0, \dots, M_N$. Далее, многократно умножая на $I$, получим остальные слагаемые.

$\boxed{\Leftarrow}$ Если $B_I R$-модуль $B_\xi M$ конечно порождён, то его образующие содержатся в $M_0 \oplus M_1 \oplus \dots \oplus M_N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Заменим каждую образующую на все слагаемые, входящие в её разложение соответствующее этой прямой сумме. Тогда $B_\xi M$ порождается этими элементами, то есть порождается слагаемыми $M_j$, где $j \leq N$. Рассмотрим элемент из $M_{N+k}$. Он является суммой элементов $b_\alpha m_\alpha$, где $b_\alpha \in B_I R$ и $m_\alpha \in M_s$, $s \leq N$. Можно считать, что

$$b_\alpha \in I^{N+k-s} \subseteq R \oplus I \oplus I^2 \oplus \dots = B_I R$$

При этом $b_\alpha m_\alpha \in I^k M_N$. Следовательно, $M_{N_k} = I^k M_N$. Это означает, что фильтрация $\xi$ является $I$-стабильной. □

**Лемма 1** (Артина-Риса)**.** *Пусть $R$ – нётерово кольцо, $I \lhd R$ – идеал, $M$ – конечно порождённый $R$-модуль и $M' \subseteq M$ – подмодуль. Пусть фильтрация*

$$\xi \colon M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$$

*является $I$-стабильной. Тогда индуцированная фильтрация*

$$\xi' \colon M' = M'_0 \supseteq M'_1 = M_1 \cap M' \supseteq M'_2 = M_2 \cap M' \supseteq \dots$$

*является $I$-стабильной.*

*Доказательство.* Заметим, что $IM'_j \subseteq IM_j \subseteq M_{j+1}$ и $IM'_j \subseteq IM' \subseteq M'$. Следовательно, $IM'_j \subseteq M_{j+1} \cap M' = M'_{j+1}$. Следовательно, $\xi'$ также $I$-фильтрация.

$B_I R$-модуль $B_{\xi'} M' = M' \oplus M'_1 \oplus \dots$ является подмодулем в модуле $B_\xi M$. Поскольку $M$ – конечнопорождённый модуль над нётеровым кольцом, он нётеров, и значит, все его подмодули $M_j$ и $M'_j$ конечно порождены. По предыдущему предложению модуль $B_\xi M$ конечно порождён. При этом кольцо $B_I R$ является конечно порождённой $R$-алгеброй. В самом деле, как $R$-алгебра $B_I R$ порождается элементами 1 и $tf_i$, $1 \leq i \leq k$, где $I = (f_1, \ldots, f_k)$ и

$$B_I R = R \oplus It \oplus I^2 t^2 \oplus \ldots$$

Следовательно, кольцо $B_I R$ является нётеровым. Значит, подмодуль $B_{\xi'} M'$ конечно порождённого $B_I R$-модуля $B_\xi M$ является конечно порождённым. Снова по предложению 1, фильтрация $\xi'$ является $I$-стабильной. $\square$

**Теорема 1** (Крулля о пересечении)**.** *а) Пусть $R$ – нётерово кольцо и $I \lhd R$ – идеал в нём. Рассмотрим конечно порождённый $R$-модуль $M$. Существует $r \in I$ такое, что*

$$(1 - r) \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} I^j M \right) = 0.$$

*б) Если $R$ – область целостности или локальное кольцо и $I \neq R$, то*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} I^j = \{0\}.$$

*Доказательство.* $\boxed{\text{а}}$ Применим лемму Артина-Риса к подмодулю $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} I^j M$ модуля $M$ и фильтрации

$$\xi \colon M = M_0 \supseteq IM \supseteq I^2 M \supseteq \ldots,$$

которая очевидно является $I$-стабильной.

Получаем, что фильтрация

$$\xi' \colon M' \supseteq M' \cap IM \supseteq M' \cap I^2 M \supseteq \ldots$$

также является $I$-стабильной. Это означает, что для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $M'_{N+1} = IM'_N$. При этом

$$M'_N = M' \cap I^N M = \bigcap_{j=1}^{\infty} I^j M \cap I^N M = \bigcap_{j=1}^{\infty} I^j M = M'$$

и аналогично $M'_{N+1} = M'$. Получаем $M' = IM'$. По следствию 2 из лекции 11 существует $r \in I$ такой, что $(1 - r)M' = \{0\}$.

$\boxed{\text{б}}$ Применим пункт а) к случаю $M = R$. Получим $(1 - r) \left( \bigcap_{j=1}^{\infty} I^j \right) = \{0\}$ для некоторого $r \in I$. Поскольку $1 \notin I$, если $1 - r$ не является делителем нуля, то $\bigcap_{j=1}^{\infty} I^j = 0$.

В случае, когда $R$ – область целостности, делителей нуля не существует и потому $1 - r$ не является делителем нуля.

Рассмотрим случай, когда $R$ – локальное кольцо. Поскольку любой идеал включается в максимальный, имеем $I \subseteq \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ – единственный максимальный идеал в $R$. Поскольку любой элемент вне максимального идеала локального кольца обратим (иначе его главный идеал должен был бы содержаться в $\mathfrak{m}$), элемент $1 - r$ обратим, и потому, не является делителем нуля.

$\square$

**Следствие 1.** *Пусть $R$ – нётерово локальное кольцо и $I$ – собственный идеал в $R$. Если $\mathrm{gr}_I R$ – область целостности, то $R$ – область целостности.*

*Доказательство.* Пусть $fg = 0$, где $f, g \in R$. Тогда $in(f)in(g) = 0$ в $\mathrm{gr}_I R$. Так как $\mathrm{gr}_I R$ – область целостности, либо $in(f) = 0$, либо $in(g) = 0$. Пусть для определённости $in(f) = 0$. Это означает, что $f \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} I^j$. Однако по пункту б) предыдущей теоремы $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} I^j = \{0\}$. Следовательно, $f = 0$. $\square$