

ЛЕКЦИЯ 6

Определение 1. Простой идеал $P \triangleleft R$ ассоциирован с модулем M , если P – аннулирующий идеал некоторого элемента $m \in M$.

Множество простых идеалов ассоциированных с M будем обозначать $\text{Ass}_R M$ или $\text{Ass} M$, если кольцо R восстанавливается из контекста.

Замечание 1. Немного противоречивая терминология говорит, что для $I \triangleleft R$ простые идеалы, ассоциированные с I – это $\text{Ass}_R(R/I)$, а не $\text{Ass}_R I$. Но это обычно не приводит к путанице.

Предложение 1. Пусть R – кольцо и M – ненулевой R -модуль. И пусть $I \triangleleft R$ – идеал, являющийся максимальным среди идеалов, являющихся аннуляторами ненулевых элементов из M . Тогда I – простой идеал (и следовательно $I \in \text{Ass} M$). В частности, если кольцо R нётерово, то $\text{Ass} M \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $r, s \in R$ таковы, что $s \notin I$. покажем, что $r \in I$, что докажет простоту I . Пусть $m \in M$ – такой элемент, что $\text{ann}(m) = I$. Тогда $rst = 0$, но $sm \neq 0$. Рассмотрим идеал $J = (r, I)$. Имеем $I \subseteq J \subseteq \text{ann}(sm)$. Поскольку I максимален среди идеалов, являющихся аннуляторами ненулевых элементов из M , получаем $I = \text{ann}(sm)$, а значит, $I = J = (r, I)$, откуда следует $r \in I$.

Если кольцо R нётерово, то в нём найдётся идеал максимальный среди идеалов, являющихся аннуляторами ненулевых элементов из M . В самом деле, если идеал не максимален с таким условием, его можно расширить. Но если максимального с таким условием идеала нет, то мы будем бесконечно расширять данный идеал, что даст бесконечную цепочку вложенных идеалов. А это противоречит нётеровости кольца. $\square$

Следствие 1. Пусть M – модуль над нётеровым кольцом R . Тогда

- а) Элемент $m \in M$ нулевой тогда и только тогда, когда $m = 0$ в локализации M_P для всех $P \in \text{Ass} M$.
- б) Пусть $K \subseteq M$ – подмодуль. Тогда $K = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $K_P = \{0\}$ для всех $P \in \text{Ass} M$.
- в) Пусть $\varphi: M \rightarrow N$ – гомоморфизм модулей. Он является мономорфизмом (инъекцией) тогда и только тогда, когда для каждого $P \in \text{Ass} M$ гомоморфизм $\varphi_P: M_P \rightarrow N_P$ является мономорфизмом.

Доказательство. а) Пусть $m \neq 0$. Тогда идеал $\text{ann}(m)$ не совпадает со всем кольцом и в силу нётеровости R он может быть включён в идеал P , являющийся максимальным среди идеалов, являющихся аннуляторами ненулевых элементов из M . По предложению 1 идеал P прост. При этом $m = \frac{m}{1} \neq 0$ в M_P , так как $\text{ann}(m) \subseteq P$. В обратную сторону импликация очевидна.

б) Допустим, что $K \neq 0$. Выберем $m \neq 0 \in K$. По пункту а) существует простой идеал P такой, что $m \in K_P$ не нулевой, что означает $K_P \neq \{0\}$. В обратную сторону импликация очевидна.

в) Из того, что $R[U^{-1}]$ – плоский модуль для любого мультипликативно замкнутого множества U (и в частности для $U = R \setminus P$), следует, что $\text{Ker } \varphi_P = (\text{Ker } \varphi)_P$. Применим пункт б) для $K = \text{Ker } \varphi$. $\square$

Лемма 1. Пусть M, M' и M'' – R -модули. Тогда

- а) Если $M = M' \oplus M''$, то $\text{Ass} M = \text{Ass} M' \cup \text{Ass} M''$.

б) Если $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ – короткая точная последовательность, то $\text{Ass}M' \subseteq \text{Ass}M \subseteq \text{Ass}M' \cup \text{Ass}M''$.

Доказательство. Докажем сперва пункт б), а из него выведем пункт а).

б) Включение $\text{Ass}M' \subseteq \text{Ass}M$ выполнено по определению, поскольку есть включение $M' \subseteq M$. Пусть $P \in \setminus \text{Ass}M'$. По определению существует элемент $x \in M$ такой, что $P = \text{ann}(x)$. Тогда циклический модуль Rx изоморфен R/P . Рассмотрим любой элемент $z = y + P \neq 0 \in R/P$. Имеем $\text{ann}(z) \supseteq P$. С другой стороны $rz = 0$ влечёт $ry \in P$, что в силу простоты P означает $r \in P$. Таким образом, $\text{ann}(z) = P$. Поскольку $P \notin \text{Ass}M'$, получаем $Rx \cap M' = \{0\}$. Значит, Rx изоиморфно проецируется на свой образ в M'' . Таким образом, $P \in \text{Ass}M''$.

а) Чтобы получить утверждение пункта а) нужно применить пункт б) к короткой точной последовательности

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M' \oplus M'' \rightarrow M'' \rightarrow 0.$$

□

Определение 2. R -модуль M называется *нётеровым*, если любой подмодуль в M конечно порождён.

Упражнение 1. Докажите, что модуль M нётеров тогда и только тогда, когда любая возрастающая цепочка подмодулей в M стабилизируется.

Указание: нужно по сути повторить доказательство эквивалентности различных определений нётерова кольца.

Лемма 2. Если R – нётерово кольцо, а M – конечно порождённый R -модуль, то модуль M нётеров.

Доказательство. Пусть модуль M порождён элементами $f_1, \dots, f_t$ и N – подмодуль в M . Докажем то, что N конечно порождён индукцией по t .

База $t = 1$. Рассмотрим гомоморфизм $\pi: R \rightarrow M, 1 \mapsto f_1$. Тогда подный прообраз $\pi^{-1}(N)$ – идеал в R . Этот идеал конечно порождён, так как R – нётерово кольцо. Но тогда образы его порождающих порождают N .

Шаг индукции. Пусть для любого числа образующих меньше t утверждение верно. Рассмотрим гомоморфизм $\pi: M \rightarrow M/Rf_1$. Тогда модуль $\bar{N} = \pi(N)$ конечно порождён по предположению индукции как подмодуль в M/Rf_1 . Пусть $g_1, \dots, g_s$ – такие элементы из M , что $\pi(g_1), \dots, \pi(g_s)$ – порождающие $\bar{N}$. Поскольку для $t = 1$ утверждение уже доказано, модуль Rf_1 нётеров, а следовательно его подмодуль $N \cap Rf_1$ конечно порождён. Пусть $h_1, \dots, h_r$ – его порождающие. Докажем, что элементы $g_1, \dots, g_s, h_1, \dots, h_r$ порождают N . Возьмём $n \in N$. Тогда существуют $r_1, \dots, r_s \in R$ такие, что $\pi(n - \sum_{i=1}^s r_i g_i) = 0$. Значит, $n - \sum_{i=1}^s r_i g_i \in Rf_1 \cap N$. Следовательно этот элемент – линейная комбинация элементов $h_1, \dots, h_r$ с коэффициентами из R . □

Предложение 2. Если R – нётерово кольцо и M – конечно порождённый R -модуль. Тогда на M существует следующая фильтрация возрастающими подмодулями

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n = M,$$

где $M_{i+1}/M_i \cong R/P_i$ для некоторых простых идеалов $P_i \triangleleft R$.

Доказательство. Если $M \neq \{0\}$, то по предложению 1 выполнено $\text{Ass}M \neq \emptyset$. Пусть $P_1 \in \text{Ass}M$. Тогда рассмотрим $M_1 = Rx \cong R/P_1$ – подмодуль в M . Если $M \neq M_1$, то $M/M_1 \neq \{0\}$. Применяя к M/M_1 те же рассуждения, получаем подмодуль $\widetilde{M}_2 \subseteq M/M_1$. Его прообраз при $\pi: M \rightarrow M/M_1$ – это подмодуль M_2 в M . При этом $M_1/M_1 \cong \widetilde{M}_2 \cong R/P_2$. Действуя аналогичным образом мы будем продолжать нашу фильтрацию. Однако, по лемме 2 не может быть бесконечной возрастающей цепочки подмодулей в M . Значит, найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $M_n = M$. $\square$

Теорема 1. Пусть R – нётерово кольцо и M – ненулевой конечно порождённый модуль. Тогда

а) $\text{Ass}M$ – конечное непустое множество простых идеалов, каждый из которых содержит $\text{ann}(M)$.

б) $\bigcap_{P \in \text{Ass}M} P = \{0\} \cup \{\text{делители нуля на } M\}$.

в) Взятое $\text{Ass}M$ коммутирует с локализацией по любому мультипликативно замкнутому множеству U , то есть

$$\text{Ass}_{R[U^{-1}]}M[U^{-1}] = \{PR[U^{-1}] \mid P \in \text{Ass}M, P \cap U = \emptyset\}.$$

Доказательство. а) То, что $\text{Ass}M \neq \emptyset$ было доказано в предложении 1. Пусть $P \in \text{Ass}M$. Тогда $P = \text{ann}(m) \supseteq \text{ann}(M)$. То, что множество $\text{Ass}M$ конечно следует из применения леммы 1(б) к результату предложения 2. Получаем, что в $\text{Ass}M$ входят только те простые идеалы P_i , которые встречаются как M_{i+1}/M_1 в фильтрации, построенной в предложении 2. (Но, вообще говоря, не обязательно все они, как ошибочно утверждалось на лекции.)

Остальные пункты обсудим на следующей лекции. $\square$