

ЛЕКЦИЯ 7

Мы знаем, что если $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ — точная последовательность, то

$$\text{Ass } M' \subseteq \text{Ass } M \subseteq \text{Ass } M' \cup \text{Ass } M''.$$

Приведём пример ситуации, когда правое включение строгое.

Пример 1. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0.$$

Имеем $\text{Ass}(M') = \text{Ass}(\mathbb{Z}) = \{0\}$, $\text{Ass}(M) = \text{Ass}(\mathbb{Z}) = \{0\}$. При этом

$$\text{Ass}(M'') = \text{Ass}(\mathbb{Z}_p) = \{(p)\}.$$

Таким образом, $\text{Ass}(M') \subseteq \text{Ass}(M) \subsetneq \text{Ass}(M') \cup \text{Ass}(M'')$.

Теорема 1. Пусть R — кольцо, M — конечно порождённый R -модуль. Тогда:

- (a) $\text{Ass } M$ — конечное непустое множество простых идеалов, каждый из которых содержит $\text{ann}(M)$.
- (b) $\bigcup_{P \in \text{Ass } M} P = \{x \in R \mid x \text{ — делитель нуля на } M\}$.
- (c) $\text{Ass}_{R[U^{-1}]} M[U^{-1}] = \{PR[U^{-1}] \mid P \in \text{Ass } M, P \cap U = \emptyset\}$.
- (d) $\text{Ass } M$ содержит все простые идеалы, минимальные среди простых идеалов, содержащих $\text{ann}(M)$.

Доказательство. Пункт (a) был доказан на прошлой лекции.

(b) Пусть $P \in \text{Ass } M$, тогда существует $m \neq 0$ в M такое, что $P = \text{ann}(m)$. Тогда для любого $r \in P$ имеем $rm = 0$, то есть r — делитель нуля на M . Следовательно, $P \subseteq \{r \in R \mid r \text{ — делитель нуля на } M\}$.

Далее, пусть r — делитель нуля на M , то есть $\exists m' \neq 0$ такой, что $rm' = 0$. Тогда $r \in \text{ann}(m')$. Рассмотрим идеал $I = \{s \in R \mid sm' = 0\} = \text{ann}(m')$. Поскольку R — нетерово кольцо, в множестве всех идеалов, содержащих $\text{ann}(m')$, существует максимальный элемент среди аннуляторов ненулевых элементов M . По предложению 1 из лекции 6 это простой идеал P из $\text{Ass}(M)$. Получаем $I \subseteq P$. Тогда $P \in \text{Ass } M$, и $r \in P$. Следовательно, $\{r \in R \mid r \text{ — делитель нуля на } M\} \subseteq \bigcup_{P \in \text{Ass } M} P$. Таким образом, равенство доказано.

Пункт (c) мы оставим без доказательства. (Оно не очень сложное, но довольно длинное.)

(d) Пусть P — простой идеал, минимальный среди простых идеалов, содержащих $\text{ann}(M)$. Положим $U = R \setminus P$. Тогда $R[U^{-1}]$ — локальное кольцо с максимальным идеалом $PR[U^{-1}]$. Модуль $M[U^{-1}]$ является ненулевым, так как $\text{ann}(M) \cap U = \emptyset$. Тогда $\text{Ass}_{R[U^{-1}]} M[U^{-1}] \neq \emptyset$, и существует $Q \in \text{Ass}_{R[U^{-1}]} M[U^{-1}]$, причём $Q = PR[U^{-1}]$. В самом деле, это единственный максимальный простой идеал, поскольку все элементы вне $PR[U^{-1}]$ обратимы, а простой идеал меньше дал бы простой идеал меньше, чем P в R . Но тогда $P \in \text{Ass}_R M$, поскольку ассоциированные идеалы локализации соответствуют ассоциированным идеалам исходного модуля, не пересекающимся с U по пункту (c). $\square$

Лемма 1 (об избегании простых идеалов). Пусть $I_1, \dots, I_n, J \triangleleft R$ и

$$J \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Если R содержит бесконечное поле или все I_k , кроме возможно двух, — простые идеалы, то $\exists k_0 : J \subseteq I_{k_0}$.

Доказательство. Если R содержит бесконечное поле, то любой идеал — векторное пространство над этим полем. Тогда утверждение следует из того, что векторное пространство не может быть объединением конечного числа собственных подпространств.

Теперь перейдём к доказательству в случае, когда все I_j , кроме возможно двух идеалов простые.

Индукция по n :

База: $n = 1$ — тривиально.

Случай $n = 2$: Предположим, что $J \not\subseteq I_1$ и $J \not\subseteq I_2$. Тогда $\exists x_1 \in J \setminus I_2$, $\exists x_2 \in J \setminus I_1$. Рассмотрим $x_1 + x_2 \in J$. Получаем $x_1 + x_2 \notin I_1 \cap I_2$. В самом деле, $x_1 \in J \setminus I_2 \subseteq (I_1 \cup I_2) \setminus I_2 \implies x_1 \in I_1$, аналогично $x_2 \in I_2$. Значит, если $x_1 + x_2 \in I_1$, то $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 \in I_1$, что противоречит выбору x_2 . То есть $x_1 + x_2 \notin I_1$. Аналогично, $x_1 + x_2 \notin I_2$.

Переход: $n > 2$. Предположим, что лемма верна для $n - 1$. Допустим, что $J \not\subseteq \bigcup_{j \neq k} I_j$ для всех k . Тогда $\forall k$ существует $x_k \in J \setminus \bigcup_{s \neq k} I_s$. Заметим, что $x_k \in I_k$, но $x_k \notin I_s$ при $s \neq k$. Будем считать, что идеал I_1 простой (хотя бы один из I_j должен быть простым.)

Рассмотрим элемент $x = x_1 + x_2 \cdots x_n$. Так как J — идеал, то $x \in J$, значит, $x \in I_m$ для некоторого m .

Если $m = 1$, то

$$x_1 + x_2 \cdots x_n \in I_1.$$

Но $x_1 \in I_1$, поэтому $x_2 \cdots x_n \in I_1$. Так как I_1 — простой идеал, то $\exists j \geq 2$ такое, что $x_j \in I_1$. Но это противоречит тому, что $x_j \notin I_1$ (по построению).

Значит, $m \neq 1$. Тогда $x_2 \cdots x_n \in I_m$, а значит, $x_1 \in I_m$. Но это противоречит выбору x_1 .

Итак, наше предположение неверно, то есть найдётся k такое, что $J \subseteq \bigcup_{j \neq k} I_j$. Тогда по предположению индукции $\exists k_0 : J \subseteq I_{k_0}$. $\square$

Следствие 1. Пусть R — нетерово кольцо, M — конечно порождённый R -модуль, $I \triangleleft R$. Тогда либо I содержит делитель нуля на M , либо I аннулирует некоторый элемент из M .

Доказательство. Если I не содержит делителей нуля на M , то

$$I \cap \left(\bigcup_{P \in \text{Ass } M} P \right) = \emptyset,$$

так как по теореме (а), $\bigcup_{P \in \text{Ass } M} P$ — множество всех делителей нуля на M . Однако объединение $\bigcup_{P \in \text{Ass } M} P$ конечно. Тогда по лемме об избегании простых идеалов, существует $P \in \text{Ass } M$ такой, что $I \subseteq P$. Но $P = \text{ann}(m)$ для некоторого $m \in M$, $m \neq 0$. Значит, $I \subseteq \text{ann}(m)$, то есть I аннулирует элемент $m \in M$. $\square$

Определение 1. Подмодуль $N \subseteq M$ называется P -примарным, если $\text{Ass}_R(M/N) = \{P\}$, где P — простой идеал.

Определение 2. Подмодуль $N \subseteq M$ называется копримарным, если $\text{Ass}_R N = \{P\}$ для некоторого простого идеала P .

Следствие 2. Пусть R — нетерово кольцо, M — конечно порождённый R -модуль, $P \triangleleft R$ — простой идеал, $N_1, \dots, N_t$ — подмодули в M . Если каждый N_i — это P -примарный подмодуль, то $\bigcap_{i=1}^t N_i$ — также P -примарный подмодуль.

Доказательство. Индукция по t :

База: $t = 1$ — очевидно.

Переход: пусть $t = 2$. Обозначим $\tilde{N} = N_1 \cap N_2$. Рассмотрим точную последовательность:

$$0 \rightarrow M/\tilde{N} \rightarrow M/N_1 \oplus M/N_2.$$

Так как M/N_1 и M/N_2 — P -копримарные модули, то $\text{Ass}(M/N_1) = \{P\}$, $\text{Ass}(M/N_2) = \{P\}$. Тогда

$$\text{Ass}(M/\tilde{N}) \subseteq \text{Ass}(M/N_1 \oplus M/N_2) = \text{Ass}(M/N_1) \cup \text{Ass}(M/N_2) = \{P\}.$$

Поскольку $M/\tilde{N} \neq 0$, то $\text{Ass}(M/\tilde{N}) \neq \emptyset$, значит, $\text{Ass}(M/\tilde{N}) = \{P\}$, то есть $\tilde{N}$ — это P -примарный подмодуль.

Для $t > 2$ применяем индукцию: $\bigcap_{i=1}^t N_i = \left(\bigcap_{i=1}^{t-1} N_i\right) \cap N_t$ — пересечение двух P -примарных подмодулей, а значит, снова P -примарный. $\square$

Теорема 2. Пусть $P \triangleleft R$ — простой идеал. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (а) M — копримарный модуль с единственным ассоциированным простым идеалом P .
- (б) P — минимальный среди простых идеалов, содержащих $\text{ann}(M)$, и любой элемент вне P не является делителем нуля на M .
- (в) Существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $P^k \subseteq \text{ann}(M)$, и любой элемент вне P не является делителем нуля на M .

Доказательство будет на следующей лекции.