Лекция 9

На протяжении этой лекции R – нётерово кольцо и M – конечно порождённый R-модуль.

Пусть P – минимальный простой идеал в R, содержащий аннулятор $\operatorname{ann} M$ модуля M. Рассмотрим гомоморфизм локализации $\pi\colon M \to M_P$. Пусть

$$\operatorname{Ker} \pi = M'.$$

Лемма 1. *Подмодуль $M' \subseteq M$ является P-примарным.*

Доказательство. Поскольку $\pi\colon M \to M_P$ и $\operatorname{Ker} \pi = M'$, гомоморфизм π индуцирует сложение $M/M' \hookrightarrow M_P$. При этом $\operatorname{Ass}(M/M') \subseteq \operatorname{Ass}(M_P)$.

Заметим, что $\operatorname{ann} M/M' = \{r \in R \mid rM \subseteq M'\}$. Следовательно, $\operatorname{ann} M \subseteq \operatorname{ann} M/M'$. С другой стороны если $r \in \operatorname{ann} M/M'$, то для любого $m \in M$ имеем $rm \in M'$, то есть существует $u \in U = R \setminus P$ такой, что $urm = 0$. Пусть $m_1, \ldots, m_k$ – образующие M. Тогда выбрав для них $u_1, \ldots, u_k$ со свойствами $u_i r m_i = 0$, положим $u = u_1 \ldots u_k$. Получаем $urm_i = 0$ для всех i, а следовательно, $urm = 0$ для любого $m \in M$. Итак, $ur \in \operatorname{ann} M \subseteq P$. Так как $u \notin P$ то означает $r \in P$. Итак,

$$\operatorname{ann} M \subseteq \operatorname{ann} M/M' \subseteq P.$$

Мы знаем, что P – минимальный простой идеал, содержащий $\operatorname{ann} M$. Следовательно, P – минимальный простой идеал, содержащий $\operatorname{ann} M/M'$.

При этом, если $v \in U = R \setminus P$ является делителем нуля на M/M', то $vm \in M'$ для некоторого $mM \setminus M'$, то есть $\pi(vm) = 0$, что означает, что существует $v' \in U$ такой, что $v'vm = 0$. Так как $vv' \in U$ и $m \notin M'$ это даёт противоречие. Следовательно, не существует делителей нуля на M/M' в U.

Итак, P – минимальный простой идеал, содержащий $\operatorname{ann} M/M'$ и любой элемент не из P не является делителем нуля на M/M'. По теореме 1 из лекции 8, модуль M/M' является P-копримарным. То есть подмодуль M' является P-примарным. $\square$

Определение 1. Подмодуль M' называется *P-примарной компонентой* додуля M.

Замечание 1. Подмодуль M' зависит только от M и P.

Теорема 1. *Пусть R – нётерово кольцо и M – конечно порождённый R-модуль. И пусть $M' \subseteq M$ – некоторый подмодуль. Тогда:*

a. *Модуль M' может быть представлен в виде конечного пересечения $M' = \bigcap\limits_{j=1}^{n} M_i$, где подмодули M_j являются P_j-примарными подмодулями в M и каждый $P \in \operatorname{Ass}(M/M')$ встречается среди P_j (такое представление в виде пересечения называется примарным разложением M');*
b. *Если это пересечение несократимо, то есть ни один из M_j нельзя убрать, то $\operatorname{Ass}(M/M') = \{P_1, \ldots, P_n\}$;*
c. *Если это пересечение минимально (то есть с минимальным возможным n), то P_j не повторяются. Если при этом ещё и выполнено, что P_k минимален над $\operatorname{ann} M/M'$, то M_k – это P_k-примарная компонента M';*

d. *Если* $M' = \bigcap\limits_{j=1}^{n} M_i$ *– минимальное примарное разложение и* U *– мультипликативно замкнутое подмножество в* R. *Будем считать, что* $\{P_1, \ldots, P_t\}$ *– это те* P_j, *которые не пересекаются с* U. *Тогда*

$$M'[U^{-1}] = \bigcap_{j=1}^{t} M_i[U^{-1}]$$

есть минимальное примарное разложение для $M'[U^{-1}]$.

Доказательство.

Определение 2. Скажем, что подмодуль $N \subseteq M$ *неприводим*, если он не является пересечением двух строго больших подмодулей.

Докажем сперва существование несколько другого разложения подмодуля M'. Покажем, что можно представить M' как

$$M' = \bigcap_{j=1}^{k} N_j,$$

где N_j неприводимы. Докажем это от противного. Пусть такого разложения не существует. Тогда M' не является неприводимым. Значит, $M' = M_1 \cap M_2$. Если модули M_1 и M_2 неприводимы, то мы получили разложение. Иначе один из них можно снова представить в виде объединения двух. Например,

$$M_1 = M_{11} \cap M_{12}.$$

И т.д. Если ни на каком конечном шаге разложение не будет получено, то мы получим бесконечную цепочку вложенных подмодулей модуля M, что противоречит нётеровсти M (а конечно порождённый модуль над нётеровым кольцом, как мы знаем, является нётеровым). Такое разложение называется *неприводимым* разложением M'.

Теперь покажем, что любое неприводимое разложение является примарным. Для этого для неприводимого подмодуля $N \subseteq M$ покажем, что модуль M/N копримарный. Если это не так, то $|\mathrm{Ass}(M/N)| \geq 2$. Выберем $P, Q \in \mathrm{Ass}(M/N)$. По определению идеал P является аннулятором некоторого элемента $m \in M$. Рассмотрим циклический подмодуль $A = Rm \subseteq M$. Он изоморфен R/P. Аналогично есть подмодуль $B \subseteq M$, изоморфный R/Q. При этом аннулятор любого ненулевого элемента в A равен P, а аннулятор любого ненулевого элемента в B равен Q. Следовательно, $A \cap B = \{0\}$. Пусть $\pi\colon\ \to M/N$ – канонический гомоморфизм модулей. Тогда полные прообюразы $\pi^{-1}(A) \subseteq M$ и $\pi^{-1}(B) \subseteq M$ пересекаются по подмодулю N. Но поскольку подмодуль N неприводим, он совпадает лиюбо с $\pi^{-1}(A)$, либо с $\pi^{-1}(B)$. Значит, M/N совпадает либо с A, либо с B. Это противоречит тому, что $A \cap B = \{0\}$ и подмодули A и B ненулевые. Полученное противоречие показывает, что M/N копримарный.

Итак, мы показали, что примарное разложение существует и тем самым доказали часть пункта а. Заметим далее, что все утверждения теоремя являются утверждениями о фактормодуле M/M'. Заменим модуль M на модуль M/M' и далее будем считать, что $M' = \{0\}$. (При этом мы ничего не потеряем.)

Завершим доказательство пункта $\boxed{a.}$ Как мсы договорились, считаем, что $M' = \{0\}$ и у нас есть примарное разложение $\{0\} = M' = \bigcap\limits_{j=1}^{n} M_j$. Рассмотрим отображение $M \to \bigoplus\limits_{j=1}^{n} M/M_j$. (Отображение в каждое прямое слагаемое – это канонический гомоморфизм.) Ядро этого отображения – это $\bigcap_{j=1}^{n} M_j = \{0\}$. То есть это вложение. Следовательно, (по доказанному ранее)

$$\mathrm{Ass}(M/M') = \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}\left(\bigoplus_{j=1}^{n} M/M_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Ass}(M/M_j) = \bigcup_{j=1}^{n} P_j.$$

Пункт а доказан.

$\boxed{b.}$ Мы всё ещё считаем, что $M' = \{0\}$. Если данное примарное разложение несократимо, то для каждого j_0 выполнено $\bigcap\limits_{j \neq j_0} M_j \neq \{0\}$. Так как

$$M_{j_0} \cap \bigcap_{j \neq j_0} M_j = \{0\}.$$

Тогда

$$\bigcap_{j \neq j_0} M_j = \bigcap_{j \neq j_0} M_j / \left(M_{j_0} \cap \bigcap_{j \neq j_0} M_j\right) = \left(\left(\bigcap_{j \neq j_0} M_j\right) + M_{j_0}\right) / M_{j_0} \subseteq M/M_{j_0}.$$

Однако, а модуль M/M_j является P_{j_0}-копримарным. Значит, модуль $\bigcap\limits_{j \neq j_0} M_j$ является P_{j_0}-копримарным. Следовательно,

$$\{P_{j_0}\} = \mathrm{Ass}(\bigcap_{j \neq j_0} M_j) \subseteq \mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(M/M').$$

Так как это верно для любого j_0, пункт b доказан.

$\boxed{c.}$ Ранее было доказано, что пересечение P-примарных модулей является P-примарным. Следовательно, если в некотором примарном разложении заменить все P-примарные модули на их пересечение, то мы получим вообще говоря другое примарное разложение. При этом количество пересекаемых подмодулей уменьшится, если среди $P_1, \ldots, P_n$ были совпадающие. Значит, для минимального рпазложения все P_j различны.

Пусть теперь P_k – минимальный простой идеал над $\mathrm{ann} M = \mathrm{ann} M/M'$. Покажем, что M_k – это P_k-примарная компонента, то есть ядро отображения локализации $\alpha\colon M \to M_{P_k}$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & M_{P_k} \arrow[d] \\ M/M_k \arrow[r] & (M/M_k)_{P_k} \end{tikzcd}$$

Здесть верхняя горизонтальная стрелка – это α, левая вертикальная стрелка – это $\beta\colon M \to M/M_k$ – канонический гомоморфизм, правая вертикальная стрелка – это γ – канонический гомоморфизм при факторизации по локализации M_k, нижняя горизонтальная стрелка – это δ – это локализация по P_k

модуля M/M_k. Ясно, что $M_k = \operatorname{Ker}\beta$. Чтобы доказать, что $\operatorname{Ker}\alpha = M_k$ надо доказать, что γ и δ – вложения.

Докажем то, что δ – вложение. Если некоторый элемент при локализации по $U = R \setminus P_k$ переходит в ноль, то в его аннуляторе лежит некоторый элемент $u \in U$. Но при этом мы знаем, что модуль M/M_k является P_k-копримарным. Следовательно, аннулятор любого ненулевого элемента равен P_k и не пересекается с U. Следовательно, ядро δ равно $\{0\}$.

Докажем то, что γ – вложение. Напомним, что $\bigcap\limits_{j=1}^{n} M_j = \{0\}$. Следовательно, $\varphi\colon M \to \bigoplus_{i=1}^{n} M/M_j$ – вложение. Тогда отображение

$$\varphi_{P_k}\colon M_{P_k} \to \bigoplus_{i=1}^{n} (M/M_j)_{P_k}$$

является вложением. Так как P_k минимален над $\operatorname{ann} M = \operatorname{ann} M/M'$ и каждый P_j содержит $\operatorname{ann} M$, не существует такого $j \neq k$, что $P_j \subseteq P_k$. Но при этом модуль M/M_j является P_j-копримарным. Следовательно, $(M/M_j)_{P_k} = \{0\}$ для каждого $j \neq k$. В самом деле, так как для каждого $j \neq k$ выполнено $P_j \subsetneq P_k$, значит $P_j \cap U \neq \varnothing$, где $U = R \setminus P_k$. Пусть $u \in P_j \cap U$. Тогда для каждого $a \neq 0 \in M/M_j$ выполнено $ua = 0$, так как $u \in P_j = \operatorname{ann} a$. Следовательно, так как $u \in U$, образ a при локализации по P_k равен нулю. Итак, $(M/M_j)_{P_k} = \{0\}$ при $j \neq k$. Значит, $\bigoplus_{i=1}^{n} (M/M_j)_{P_k} = (M/M_k)_{P_k}$. Это показывает, что γ – вложение.

$\boxed{d.}$ Пусть U – мультипликативно замкнутое подмножество в R. Ранее было доказано следующее утверждение. Если $U \cap P_j = \varnothing$, то $P_j[U^{-1}]$ – простой идеал в $R[U^{-1}]$. При этом поскольку локализация перестановочна со взятием мнеожества ассоциированных простых идеалов, подмодуль $M_j[U^{-1}]$ является $P_i[U^{-1}]$-примарным. Если же $U \cap P_j \neq \{0\}$, то $M_j[U^{-1}] = M[U^{-1}]$ (так как локализация по U обнуляет M_j).

Получаем

$$\{0\} = \bigcap_{j=1}^{n} M_j[U^{-1}] = \bigcap_{j=1}^{t} M_j[U^{-1}]$$

есть примарное разложение $\{0\} = M'[U^{-1}]$. $\square$

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{27} \oplus \mathbb{Z}_5$ – конечная абелева группа. Тогда A – это $\mathbb{Z}$-модуль. Рассмотрим подмодуль $M' = \{0\}$. Найдём примарное разложение M'.

Ясно, что $\operatorname{Ass}(M) = \{(2), (3), (5)\}$. Так как эти идеалы не содержатся друг в друге, по пункту c предыдущей теоремы, минималоьное примарное разложение будет состоять из примарных компонент M. Легко видеть, что

- (2)-примарная компонента M равна $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{27} \oplus \mathbb{Z}_5$;
- (3)-примарная компонента M равна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$;
- (5)-примарная компонента M равна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{27}$.

Итак,

$$\{0\} = (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{27} \oplus \mathbb{Z}_5) \cap (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5) \cap (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{27}) -$$

это примарное разложение $\{0\}$.

Пример 2. Пусть $R = F[x]_{(x)}$. И пусть $M = R \oplus R/(x)$. Тогда $\mathrm{Ass}(M) = \{(x), \{0\}\}$.

Рассмотрим подмодуль $M' = \{0\}$. Найдём примарное разложение M'.

Пусть $M_1 = \{(0, a)\} = \{0\} \oplus R/(x)$ и $M_2 = R(1, a(1+x))$ для некоторого $a \in R$. При этом $\{0\} = M_1 \cap M_2$ – (не однозначное) примарное разложение.