

ЛЕКЦИЯ 11

Определение 1. Знак подстановки σ – это

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ четная,} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Теорема 1. $\operatorname{sgn}(\sigma\delta) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\delta)$.

Доказательство. Пусть $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$, $\delta = \eta_1 \dots \eta_m$ – разложения в произведения транспозиций. Тогда $\sigma\delta = \tau_1 \dots \tau_k \eta_1 \dots \eta_m$. □

Следствие 1. $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Доказательство.

$$1 = \operatorname{sgn}(\operatorname{id}) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\operatorname{sgn}(\sigma).$$

□

Заметим, что

$$(a_1, \dots, a_k) = (a_1, a_2) \dots (a_{k-1}, a_k).$$

Следствие 2. $\operatorname{sgn}(a_1, \dots, a_k) = (-1)^{k-1}$.

Определение 2. *Декремент* подстановки σ – это число $d(\sigma)$, равное n минус количество независимых циклов (тут циклы длины 1 считаются).

Теорема 2. $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{d(\sigma)}$

Доказательство. Пусть длины независимых циклов $k_1, \dots, k_m$. Тогда

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i=1}^m (-1)^{k_i-1} = (-1)^{(\sum_{i=1}^m k_i) - m} = (-1)^{n-m} = (-1)^{d(\sigma)}.$$

□

Лемма 1. Четных и нечетных подстановок в S_n при $n \geq 2$ одинаковое число, то есть по $\frac{n!}{2}$.

Доказательство. Отображение $\Phi: \sigma \rightarrow (1, 2)\sigma$ устанавливает биекцию между четными и нечетными подстановками. В самом деле, если $(1, 2)\sigma = (1, 2)\delta$, то умножая это равенство на $(1, 2)^{-1} = (1, 2)$ получаем $\sigma = \delta$. Это доказывает инъективность Φ . Пусть теперь β – некоторая нечетная подстановка. Тогда $\beta = (1, 2)\alpha$, для $\alpha = (1, 2)\beta$ – четная подстановка. Это доказывает сюръективность Φ .

Так как Φ – биекция, четных и нечетных подстановок одинаковое количество. Так как в сумме их $n!$, количество четных равно количеству нечетных и равно $\frac{n!}{2}$. □

Определение 3. Пусть A – квадратная матрица $n \times n$. Определителем (детерминантом) матрицы A называется число

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

В этом выражении $n!$ слагаемых. Половина – со знаком "+", половина – со знаком "-". Каждое слагаемое – произведение n элементов A по одному из каждой строки и по 1 из каждого столбца.

- Определитель 1×1 . $\det(a_{11}) = a_{11}$.
- Определитель 2×2 .

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Определитель 3×3 .

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Теорема 3.

$$\det A^T = \det A.$$

Доказательство. Пусть $A^T = B$. Тогда

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \langle \delta = \sigma^{-1} \rangle = \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots a_{n\delta(n)} = \det A.\end{aligned}$$

□

Разобьем матрицу на строки/столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = (A^{(1)} \quad \dots \quad A^{(n)})$$

Тогда $\det A = \varphi(A_1, \dots, A_n) = \psi(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$

Из предыдущей теоремы $\varphi = \psi$. Будем их обозначать $\det$.

Лемма 2.

$$\det(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

Доказательство. В каждое слагаемое $a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ входит ровно один элемент из A_i . Он умножается на λ , значит, и все слагаемое умножается на λ . □

Лемма 3.

$$\det(A_1, \dots, A'_i + A''_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A''_i, \dots, A_n).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\det(A_1, \dots, A'_i + A''_i, \dots, A_n) &= \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots (a'_{i\delta(i)} + a''_{i\delta(i)}) \dots a_{n\delta(n)} = \\ &= \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots a'_{i\delta(i)} \dots a_{n\delta(n)} + \sum_{\delta \in S_n} \operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots a''_{i\delta(i)} \dots a_{n\delta(n)} = \\ &= \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A''_i, \dots, A_n).\end{aligned}$$

□

Определение 4. Функция $F(v_1, \dots, v_k)$ от k векторных аргументов называется *полилинейной*, если при фиксированных значениях всех, кроме одного аргументов она является линейной по этому аргументу.

Две предыдущие леммы дают следующую теорему.

Теорема 4. *Определитель является полилинейной функцией от строк (столбцов) матрицы.*

Доказательство. Для строк теорема уже доказана. Для столбцов можно провести все те же рассуждения, а можно воспользоваться тем, что $\det A = \det A^T$ (операция транспонирования меняет местами строки и столбцы). □

Следствие 3. *Определитель матрицы с нулевой строкой (нулевым столбцом) равен нулю.*

Доказательство. Умножим эту нулевую строку на ноль. С одной стороны определитель не поменяется. С другой, он умножится на ноль. □

Определение 5. Функция $F(v_1, \dots, v_k)$ от k векторных аргументов называется *кососимметричной*, если при смене местами двух аргументов она умножается на -1 .

Теорема 5. *Определитель – кососимметричная функция от строк/столбцов матрицы.*

Доказательство. Докажем для строк. Для столбцов доказательство можно получить, используя транспонирование. Нужно доказать, что

$$\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

Пусть $A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n)$, $B = (A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{i\sigma(i)} \dots b_{j\sigma(j)} \dots b_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} = \langle \delta = \sigma(i, j) \rangle = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\delta(1)} \dots a_{n\delta(n)} = \sum_{\delta \in S_n} (-\operatorname{sgn}(\delta) a_{1\delta(1)} \dots a_{n\delta(n)}) = -\det A. \end{aligned}$$

□

Следствие 4. *Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.*

Доказательство. Поменяем местами эти две одинаковые строки. С одной стороны определитель не поменяется. С другой, он умножится на минус 1. □

Замечание 1. В предыдущем утверждении мы получили, что $\det A = -\det A$. Отсюда $2\det A = 0$. Однако из этого следует, что либо $\det A = 0$, либо $2 = 0$. При этом существуют поля, в которых $2 = 0$. Например, поле $\mathbb{Z}_2$. Для таких полей предыдущее утверждение не верно. Поэтому в его формулировку стоит добавить условие $2 \neq 0$.

Следствие 5. *Определитель матрицы с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю. (Если в поле F выполнено $2 \neq 0$.)*

Доказательство.

$$\det(A_1, \dots, A_i \dots \lambda A_i, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i \dots A_i, \dots, A_n) = \lambda 0 = 0.$$

□

Вычислим определитель треугольной матрицы.

Предложение 1.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Доказательство. Для любой нетождественной подстановки σ существует i такой, что $\sigma(i) < i$. В самом деле, если не верно $\sigma(n) < n$, то $\sigma(n) = n$. Аналогично, если не верно $\sigma(n-1) < n-1$, то $\sigma(n-1) = n-1$, и т.д. Рассмотрим слагаемое определителя, соответствующее σ . Оно равно $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$. Если $\sigma(i) < i$, то $a_{i\sigma(i)} = 0$, а значит, и все слагаемое ноль. Остается только слагаемое, соответствующее id , равное $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$. □

Следствие 6. $\det E = 1$.

Следствие 7.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Теорема 6 (Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк/столбцов).

- При элементарном преобразовании III типа с коэффициентом s определитель умножается на s . (Линейность.)

- При элементарном преобразовании II типа определитель умножается на -1 . (Кососимметричность.)
- При элементарном преобразовании I типа определитель не меняется.

Доказательство. Первые 2 пункта уже доказаны, надо доказать третий.

$$\begin{aligned}\det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j + \lambda A_i, \dots, A_n) &= \\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A_i, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n) = \\ &= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) + 0.\end{aligned}$$

Второе слагаемое равно нулю, так как это определитель матрицы с пропорциональными строками. $\square$

Алгоритм вычисления определителей.

1) Приводим элементарными преобразованиями матрицу к ступенчатому виду. При этом (при элементарных преобразованиях 2 и 3 типа) определитель умножается на ненулевое число. Перемножаем эти числа и запоминаем результат μ .

2) Если ступенчатый вид матрицы не является строго ступенчатым (то есть есть нулевая строка), то конечный определитель ноль, а значит, и начальный определитель ноль.

3) Если ступенчатый вид строго ступенчатый, то конечный определитель равен произведению диагональных элементов. Деля на μ , находим начальный определитель.

Пример 1.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-1) = -6,\end{aligned}$$

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Нами уже доказана следующая теорема.

Теорема 7. Для матрицы A размера $n \times n$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $\text{rk} A < n$,
- 2) в ступенчатом виде A есть нулевая строка,
- 3) $\det A = 0$.
- 4) К матрице A нет обратной.

Напомним, что матрицы, удовлетворяющие условиям теоремы, называются вырожденными.