

ЛЕКЦИЯ 12

Теорема 1. *Предположим, что в поле F выполнено $2 \neq 0$. Пусть $\Phi: (F^n)^n \rightarrow F$ – кососимметричная полилинейная функция. Тогда $\Phi(A) = \Phi(E) \det(A)$. (Тут $\det$ и Φ рассматривается как функция от системы строк, то есть $\det(A) = \det(A_1, \dots, A_n)$.)*

Доказательство. Из линейности следует, что если в матрице B есть нулевая строка, то $\Phi(B) = 0$. Действительно, умножим эту строку на ноль, с одной стороны Φ умножится на ноль, а с другой – не изменится. Из кососимметричности следует, что если в матрице C есть две одинаковые строки, то $\Phi(C) = 0$. В самом деле, поменяем эти строки. С одной стороны определитель умножится на минус 1, а с другой – не изменится. Это значит, что удвоенный определитель равен нулю, а так как $2 \neq 0$, на 2 можно поделить.

Из линейности, если в матрице D есть две пропорциональные строки, то $\Phi(D) = 0$. Отсюда можно так же, как и для определителя, вывести, что Φ не меняется при элементарных преобразованиях строк I типа. Из кососимметричности, при элементарных преобразованиях II типа Φ умножается на -1 . Из линейности, при элементарных преобразованиях строк III типа с коэффициентом c , определитель умножается на c . Таким образом, Φ и $\det$ умножаются на одинаковые числа при всех элементарных преобразованиях.

Приведем матрицу A к упрощенному ступенчатому виду S . При этом для некоторого $\mu \neq 0$ выполнено $\Phi(A) = \mu \Phi(S)$, $\det(A) = \mu \det(S)$. Если S имеет нулевую строку, то $\det(S) = \Phi(S) = 0$, а значит, $\det(A) = \Phi(A) = 0$. И выполнено $\Phi(A) = \Phi(E) \det(A)$.

Если же в S нет нулевой строки, то $S = E$. Имеем $\det(A) = \mu \det(E) = \mu$. Тогда

$$\Phi(A) = \mu \Phi(E) = \Phi(E) \det(A).$$

□

Замечание 1. Мы доказываем эту теорему (и все дальнейшее, что на нее опирается) в предположении, что $2 \neq 0$. Однако для поля, в котором $2 = 0$ она (и все дальнейшее) тоже верна, только в этом случае надо понимать кососимметричность по-другому, а именно, что функция от матрицы с двумя одинаковыми строками равна нулю. (Это единственное место, где мы воспользовались тем, что $2 \neq 0$.) Для того, чтобы теорема была доказана в этом случае, нужно доказать, что определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен нулю даже в случае $2 = 0$. Далее не будем упоминать условие $2 \neq 0$.

Задача 1. Докажите, что если в поле F выполняется $2 = 0$ и в матрице A выполнено $A_i = A_j$, то $\det A = 0$.

Указание: Рассмотрите определение определителя и разбейте слагаемые на пары равных. Тогда итоговый определитель будет равен $2x = 0x = 0$ для некоторого x .

Напомним, что строки матрицы AB – это линейная комбинация строк B с коэффициентами из строк A .

То есть если $A_i = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $AB = C$, то $C_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j B_j$

Теорема 2. *Тогда*

$$\det AB = \det A \det B.$$

Доказательство. Фиксируем матрицу B и рассмотрим функцию $\Phi_B: \text{Mat}_{n,n} \rightarrow F$, $\Phi_B(A) = \det(AB)$. Тогда Φ_B – это полилинейная кососимметричная функция от строк A . Действительно, пусть

$$X = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A'_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A''_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A'_i + A''_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, P = XB, Q = YB, C = AB.$$

Тогда при $j \neq i$, $P_j = Q_j = C_j$ и $C_i = P_i + Q_i$. Значит,

$$\Phi_B(A) = \det C = \det P + \det Q = \Phi_B(X) + \Phi_B(Y).$$

Второе равенство для полилинейности и кососимметричности проверяются аналогично.

Имеем $\det AB = \Phi_B(A) = (\det A) \Phi_B(E) = \det A \det B$.

□

Следствие 1.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Теорема 3. Пусть M – квадратная матрица $n \times n$ имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ X & B \end{pmatrix},$$

где $A \in \text{Mat}_{k,k}$, $X \in \text{Mat}_{n-k,k}$, $B \in \text{Mat}_{n-k,n-k}$, $0 \in \text{Mat}_{k,n-k}$. Тогда $\det M = \det A \det B$.

Доказательство. Фиксируем матрицы X и B . Тогда $\det M$ – функция $\Psi(A)$. Эта функция полилинейна и кососимметрична (даже по всем строкам M , но и по строкам A в частности). Значит, $\Psi(A) = \Psi(E) \det A$. При этом $\Psi(E) = \begin{vmatrix} E & 0 \\ X & B \end{vmatrix} = \Phi(B)$. Эта функция полилинейна и кососимметрична по столбцам B . Значит, $\Phi(B) = \Phi(E) \det(B)$. Но

$$\Phi(E) = \begin{vmatrix} E & 0 \\ X & E \end{vmatrix} = 1 \quad (\text{определитель нижнетреугольной матрицы}).$$

Следовательно, $\det M = \Psi(A) = \Psi(E) \det A = \Phi(B) \det A = \det A \cdot \det B \cdot \Phi(E) = \det A \det B$. $\square$

Выберем k строк $i_1, \dots, i_k$ и k столбцов $j_1, \dots, j_k$ в матрице A . Удалим все остальные строки и столбцы. Останется квадратная матрица $k \times k$, находящаяся на пересечении выбранных строк и столбцов. Определитель этой матрицы мы будем называть $k \times k$ -минором исходной матрицы A . (Конечно же у данной матрицы много различных $k \times k$ -миноров.)

Обозначим $(n-1) \times (n-1)$ -минор, стоящий на пересечении всех строк, кроме i -ой и всех столбцов, кроме j -го через M_{ij} .

Определение 1. Алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} – это число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема 4 (Разложение определителя по i -ой строке).

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Доказательство. Разложим i -ю строку в сумму n строк:

$$(a_{i1}, \dots, a_{in}) = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in}).$$

Тогда определитель есть сумма n слагаемых. Рассмотрим j -е из них V_j . Поменяем в нем i -ю строку с $i-1$ -й, затем $i-1$ -ю с $i-2$ -й и т.д. Совершим при этом $i-1$ транспозицию строк и поставим i -ю строку на 1 место. Аналогично, совершив $j-1$ транспозицию столбцов, поставим j столбец на 1 место.

Получим матрицу

$$U_j = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & B & \\ * & & & \end{pmatrix},$$

где матрица B получена из A вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца. То есть $\det B = M_{ij}$. По теореме об определителе с углом нулей $\det U_j = a_{ij} M_{ij}$. При этом при переходе от V_j к U_j мы поменяли знак определителя $(i-1) + (j-1)$ раз. То есть $V_j = (-1)^{(i-1)+(j-1)} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$. Получаем $\det A = \sum_{j=1}^n V_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$. $\square$

Аналогично доказывается (или формально выводится из предыдущей с помощью транспонирования) следующая теорема.

Теорема 5 (Разложение определителя по j -му столбцу).

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}.$$