

ЛЕКЦИЯ 13

Теорема 1 (Фальшивое разложение определителя по i -ой строке).

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0 \text{ при } k \neq i.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу B , полученную из A заменой k -ой строки на i -ю. В матрице B две одинаковые строки, следовательно, $\det B = 0$. Разложим определитель матрицы B по k -ой строке. Получим

$$0 = \det B = \sum_{j=1}^n b_{kj} B_{kj} = a_{ij} A_{kj}.$$

□

Аналогично получается следующая теорема.

Теорема 2 (Фальшивое разложение определителя по j -му столбцу).

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0 \text{ при } k \neq j.$$

Определение 1. *Присоединенная матрица* – это матрица $\hat{A}$ являющаяся **транспонированной** матрицей из алгебраических дополнений.

$$\hat{a}_{ij} = A_{ji}.$$

Замечание 1. Будьте внимательны, в литературе чаще присоединенной называется не транспонированная матрица из алгебраических дополнений. Мы же назвали присоединенной уже транспонированную матрицу. (Это вопрос терминологии и не очень важно, но не запутайтесь!)

Теорема 3.

$$A\hat{A} = (\det A)E.$$

Доказательство. Пусть $A\hat{A} = D$. Тогда

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{a}_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \det A. \\ d_{ik} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{a}_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0. \end{aligned}$$

□

Если $\det A \neq 0$, то разделив предыдущее равенство на $\det A$, получаем следующее утверждение.

Теорема 4 (Явная формула для обратной матрицы). *Матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. В этом случае*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}.$$

Рассмотрим квадратную СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Пусть A – матрица коэффициентов (не расширенная) этой СЛУ. Рассмотрим квадратные матрицы

$A_1, \dots, A_n$, где матрица A_i получена из A заменой i -го столбца на столбец свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Теорема 5 (Теорема Крамера). *Данная СЛУ определена тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. В этом случае решение находится по формуле $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$.*

Доказательство. Пусть A – матрица коэффициентов системы и B – столбец правых частей. Мы знаем, что система определена тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов A равен рангу расширенной матрицы коэффициентов $(A|B)$ и равен количеству неизвестных. Так как матрица A квадратная, ее ранг равен количеству неизвестных тогда и только тогда, когда он равен размеру этой матрицы, то есть $\det A \neq 0$. С другой стороны, если $\det A \neq 0$, то $\operatorname{rk} A = n$ и тогда

$$n = \operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} (A|B) \leq n.$$

Отсюда ранги A и $(A|B)$ равны и совпадают с n , то есть выполнены все условия определенности системы.

Пусть теперь $\det A \neq 0$. Тогда матрица A обратима. Изначальная СЛУ в матричном виде имеет вид $AX = B$, где X – столбец решения. Умножая слева на A^{-1} , получаем $X = A^{-1}B$.

Рассмотрим матрицу $A^{-1}A_i$. Каждый столбец умножается на A^{-1} отдельно. Поэтому в матрице $A^{-1}A_i$ все столбцы, кроме i -го – это столбцы единичной матрицы, а i -ый – это столбец X . Получаем, что

$$\frac{\det A_i}{\det A} = \det(A_i A^{-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{vmatrix} = x_i.$$

□

Замечание 2. Кажется, что на лекции теорема была доказана только в случае $\det A \neq 0$. В конспекте восполнен этот пробел.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$$

Имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -2.$$

Отсюда СЛУ определена и

$$x_1 = \frac{-1}{-1} = 1, \quad x_2 = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Напомним, что $k \times k$ -минор (минор порядка k) матрицы A – это определитель подматрицы, стоящей на пересечении некоторых k строк и некоторых k столбцов матрицы A . Если эти строки имели номера $i_1, \dots, i_k$, а столбцы – $j_1, \dots, j_k$, то будем обозначать этот минор $M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$.

Теорема 6 (Теорема о ранге матрицы). Пусть $A \in \operatorname{Mat}_{m,n}$. Ранг матрицы A равен максимальному порядку ненулевого минора этой матрицы.

Доказательство. Для того, чтобы доказать заявленное равенство, докажем неравенства в одну и другую сторону. Сперва докажем, что ранг не меньше, чем порядок любого ненулевого минора данной матрицы. Пусть в A есть ненулевой минор порядка k , и пусть это $M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$. Так как определитель этой $k \times k$ -матрицы не равен нулю, ее строки ЛНЗ. Однако строки данной матрицы – это строки $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$, в которых убраны некоторые координаты (с одинаковыми номерами). Следовательно, строки $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ ЛНЗ, то есть $\operatorname{rk} A \geq k$.

Пусть теперь $\operatorname{rk} A = k$. Докажем, что в A найдется ненулевой минор порядка k . Выберем базисные строки $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ и рассмотрим подматрицу P размера $k \times n$ в матрице A , состоящую из этих строк. Так как строки P ЛНЗ, $\operatorname{rk} P = k$. Выберем базисные столбцы матрицы P . Это столбцы с номерами $j_1, \dots, j_k$ и они ЛНЗ. Следовательно, матрица, состоящая из этих базисных столбцов имеет ранг k , а значит, определитель этой матрицы не 0. Но это в точности подматрица матрицы A , стоящая на пересечении строк $i_1, \dots, i_k$ и столбцов $j_1, \dots, j_k$. □

Пример 2. Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ имеет ранг 2. Минор на пересечении строк 1 и 2 и столбцов 2 и 3. Не равен нулю. А все 4 минора 3×3 равны нулю.

Замечание 3. Не верно, что на пересечении любых k ЛНЗ строк и k ЛНЗ столбцов стоит матрица с ненулевым определителем. Например, если взять ненулевую строку и ненулевой столбец, на их пересечении может стоять ноль (в единичной матрице, например).

Задача 1. Докажите, что если взять базисные строки и базисные столбцы, то матрица на их пересечении будет иметь ненулевой определитель.

Определение 2. Минор $(k+1) \times (k+1)$ называется *окаймляющим* минором для данного минора $k \times k$, если соответствующая подматрица получена добавлением 1 строки и 1 столбца к подматрице минора $k \times k$.

Теорема 7 (Теорема об окаймляющих минорах). Если данный минор $k \times k$ матрицы A не равен нулю, а все его окаймляющие миноры равны нулю, то $\text{rk } A = k$.

Доказательство. По теореме о ранге матрицы $\text{rk } A \geq k$. Допустим, что $\text{rk } A \geq k+1$. Пусть данный нам ненулевой минор стоит на пересечении строк $i_1, \dots, i_k$ и столбцов $j_1, \dots, j_k$. Тогда существует строка с номером $i_{k+1} \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ такая, что система строк с номерами $i_1, \dots, i_k, i_{k+1}$ ЛНЗ. Рассмотрим матрицу P размера $(k+1) \times n$, состоящую из этих строк. Ранг этой матрицы $k+1$. Тогда столбцы $P^{(j_1)}, \dots, P^{(j_k)}$ ЛНЗ так как даже если убрать строчку i_{k+1} , то они будут ЛНЗ. Дополним столбцы $P^{(j_1)}, \dots, P^{(j_k)}$ до база системы столбцов P некоторым столбцом $P^{(j_{k+1})}$. Матрица, состоящая из столбцов $P^{(j_1)}, \dots, P^{(j_k)}, P^{(j_{k+1})}$ имеет ненулевой определитель. Но это подматрица $(k+1) \times (k+1)$ в A , что противоречит условию. $\square$

Теорема 8 (Определитель Вандермонда).

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Доказательство. Обозначим данный определитель через $V(x_1, \dots, x_n)$ и докажем теорему индукцией по n .

База. $n = 2$.

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Шаг. Вычтем каждый столбец, умноженный на x_1 из следующего (сначала вычитаем $n-1$ -ый из n -го, затем $n-2$ -ой из $n-1$ -го и т.д.)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) V(x_2, \dots, x_n).$$

По предположению индукции

$$V(x_2, \dots, x_n) = \prod_{2 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Отсюда следует доказываемое утверждение. $\square$