

ЛЕКЦИЯ 17

Определение 1. *Вещественная часть* числа $z = a + bi$ – это число $\operatorname{Re} z = a$. *Мнимая часть* числа z – это число $\operatorname{Im} z = b$. (Иногда, допуская некоторую вольность обозначений, мы будем говорить, что $\operatorname{Im} z = b$.)

Определение 2. *Модуль* комплексного числа $z = a + bi$ – это неотрицательное вещественное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (корень арифметический).

Модуль равен длине радиус-вектора из начала координат в точку (a, b) . Модуль нулевого числа равен нулю, а для остальных чисел он положителен. При этом на вещественной оси модуль совпадает со стандартным модулем вещественного числа.

Определение 3. Аргумент ненулевого числа $z = a + bi \neq 0$ – это величина угла между положительным лучом оси абсцисс и радиус-вектором точки (a, b) , причем этот угол откладывается против часовой стрелки. Обозначается аргумент $\arg z$.

Можно считать, что $\arg z \in [0, 2\pi)$. Однако удобно считать, что аргумент принимает любые значения и задан по модулю 2π . То есть, например, про число с аргументом $\frac{7\pi}{4}$ можно сказать, что его аргумент $-\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{9\pi}{4}$.

Аргумент нулевого числа не определен.

Определение 4. Пусть $z = a + bi$. Тогда *комплексно сопряженное* к z число – это $\bar{z} = a - bi$.

Геометрически сопряжение соответствует отражению симметрично относительно оси абсцисс. При сопряжении модуль комплексного числа сохраняется, а аргумент меняет знак.

Свойства сопряжения.

- $\overline{\bar{z}} = z$;
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;

Доказательство. $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

Доказательство.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$;

Доказательство. $\bar{z} \cdot \overline{z^{-1}} = \overline{z \cdot z^{-1}} = \bar{1} = 1$.

- $z\bar{z} = |z|^2$.

Доказательство.

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Деление комплексных чисел. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda \cdot (a + bi) = \lambda a + \lambda bi$. Отсюда при $\lambda \neq 0$ имеем

$$\frac{a + bi}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}i.$$

Для того, чтобы выполнить деление $\frac{a+bi}{c+di}$ надо и числитель и знаменатель умножить на $\overline{c + di} = c - di$. Получаем

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.$$

В знаменателе последней дроби стоит вещественное число.

Пример 1.

$$\frac{1 + 2i}{3 - 2i} = \frac{(1 + 2i)}{(3 - 2i)} = \frac{(1 + 2i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{-1 + 8i}{13} = -\frac{1}{13} + \frac{8}{13}i$$

Определение 5. Пара $(r, \varphi) = (|z|, \arg z)$ задает полярные координаты точки $(a, b) \neq (0, 0)$. При этом $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$. Имеем:

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Данная запись комплексного числа называется *тригонометрической записью комплексного числа*.

Чтобы перейти от алгебраической записи к тригонометрической нужно вынести за скобки $|z|$. Прделаем это:

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right)$$

При этом $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$, А значит,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi.$$

Чтобы перевести из тригонометрического вида в алгебраический нужно просто раскрыть скобки.

Заметим, что вид $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0 \in \mathbb{R}$ единственный. В самом деле, если

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = s(\cos \psi + i \sin \psi),$$

то $|z| = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r$. Аналогично, $|z| = s$, то есть $r = s$. Приравнявая, вещественную и мнимую части равенства, получаем $\cos \varphi = \cos \psi$, $\sin \varphi = \sin \psi$. Отсюда $\varphi = \psi$ (с точностью до $2\pi k$).

Теорема 1. При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Перемножим два числа в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot s(\cos \psi + i \sin \psi) &= \\ &= rs((\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)) = \\ &= rs(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) \end{aligned}$$

□

Следствие 1. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Доказательство. Пусть

$$\frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{s(\cos \psi + i \sin \psi)} = t(\cos \xi + i \sin \xi).$$

Тогда

$$s(\cos \psi + i \sin \psi)t(\cos \xi + i \sin \xi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

По теореме $r = st$ и $\varphi = \psi + \xi$.

□

Пример 2 (Частный случай). $(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$.

Теорема 2 (Формула Муавра). Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ – тригонометрический вид комплексного числа. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Доказательство. Получается кратным применением предыдущей теоремы.

□

Следствие 2. Формула $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ верна не только для натуральных, но и для целых n .

Доказательство. При отрицательных n нужно применить результат примера 2 и формулу Муавра.

□

Определение 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Комплексное число w является n -ым корнем из z , если $w^n = z$. (Обозначается $w = \sqrt[n]{z}$.)

В вещественном случае. Число вещественных корней $\sqrt[n]{x}$ равно $\begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно}; \\ 2, & \text{если } n \text{ четно и } x > 0; \\ 0, & \text{если } n \text{ четно и } x < 0. \end{cases}$

Теорема 3. В комплексном случае. Число комплексных корней $\sqrt[n]{z}$ равно $\begin{cases} 1, & \text{если } z = 0; \\ n, & \text{если } z \neq 0. \end{cases}$

Доказательство. Представим z и w в тригонометрическом виде.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), w = s(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Тогда

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z = w^n = s^n(\cos n\psi + i \sin n\psi).$$

Мы доказывали, что тригонометрический вид единственный, то есть отсюда следует, что

$$\begin{cases} r = s^n; \\ \varphi + 2\pi k = n\psi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Таким образом, $s = \sqrt[n]{r}$ – корень арифметический, $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что при разных k получаются вообще говоря разные (и возможно не отличающиеся на $2\pi m$). Однако, если $k_1 - k_2 = nm$, то $\frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} + 2\pi m$. Таким образом различные (не отличающиеся на $2\pi m$) углы получаются при $k = 0, 1, \dots, n-1$. Итак,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right), k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

□

Геометрическое расположение корней Рассмотрим множество корней $\sqrt[n]{z}$ на плоскости. У всех них модуль равен $\sqrt[n]{r}$, то есть они лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[n]{r}$. Аргументы идут через $\frac{2\pi}{n}$. Таким образом, множество корней $\sqrt[n]{z}$ образуют вершины правильного n -угольника.

Определение 7. Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля называется *областью целостности* (целостным кольцом).

Пример 3. $\mathbb{Z}$ – область целостности, любое поле – область целостности.

Определение 8. Пусть R – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. *Многочлен* над R – это финитная (то есть с конечным числом ненулевых элементов) последовательность $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, где $a_i \in R$.

Определим операции сложения и умножения на многочленах.

По определению $(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$. Очевидно, что сумма двух финитных последовательностей – финитная последовательность.

По определению

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = (c_0, c_1, c_2, \dots),$$

где $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$. Также ясно, что итоговая последовательность финитная.

Рассмотрим множество многочленов $R[x]$ с коэффициентами из R с операциями $+$ и $\cdot$.

Предложение 1. $(R[x], +, \cdot)$ – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

Доказательство. Все аксиомы очевидны, кроме ассоциативности умножения. Пусть

$$((a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots)) \cdot (c_0, c_1, c_2, \dots) = (d_0, d_1, d_2, \dots)$$

и

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot ((b_0, b_1, b_2, \dots) \cdot (c_0, c_1, c_2, \dots)) = (f_0, f_1, f_2, \dots).$$

Обозначим $(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$, $(b_0, b_1, b_2, \dots) \cdot (c_0, c_1, c_2, \dots) = (v_0, v_1, v_2, \dots)$.

Имеем

$$d_k = \sum_{j=0}^k u_j c_{k-j} = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j a_i b_{j-i} c_{k-j} = \sum_{p+q+r=k} a_p b_q c_r.$$

Аналогично

$$f_k = \sum_{i=0}^k a_i v_{k-i} = \sum_{i=0}^k \sum_{s=0}^{k-i} a_i b_s c_{k-i-s} = \sum_{p+q+r=k} a_p b_q c_r.$$

□

Заметим, что единицей кольца является элемент $(1, 0, 0, \dots)$. При этом элементы $(r, 0, 0, \dots)$ складываются и умножаются также, как и элементы кольца R . Таким образом, отождествим элемент $(r, 0, 0, \dots) \in R[x]$ и $r \in R$ и получим вложение колец $R \subset R[x]$ (инъективный гомоморфизм).