

ЛЕКЦИЯ 18

Обозначим $(0, 1, 0, \dots) \in R[x]$ через x .

Лемма 1. x^n – это последовательность, в которой на n -ом месте стоит единица, а остальные элементы – нули.

Доказательство. Индукция по n . База очевидна. Шаг индукции.

$$x^n = x^{n-1} \cdot x = (0, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots) \cdot (0, 1, 0, \dots).$$

При этом при $(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = (c_0, c_1, c_2, \dots)$, выполнено $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$. У нас не равно 0 только a_1 и b_{n-1} . Таким образом, единственное c_i не равное нулю – это $c_n = 1$. \square

Таким образом, многочлен $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ может быть записан как

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Определение 1. Степень $\deg f$ многочлена $f \neq (0, 0, \dots)$ равна максимальному n такому, что $a_n \neq 0$.

Теорема 1. 1) $\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$;

2) Если R – целостное кольцо, то $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

Доказательство. Пусть $f = (a_0, a_1, \dots, a_m, 0, 0, \dots)$, $g = (b_0, b_1, \dots, b_n, 0, 0, \dots)$. Тогда

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots).$$

При $j > \max(m, n)$ элемент с номером j будет нулевой.

Пусть $fg = (c_0, c_1, \dots)$. Тогда $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$. Если $k > m + n$, то $c_k = 0$. При этом $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$, так как R целостное. Значит, $\deg(fg) = m + n$. \square

Замечание 1. Если кольцо R не является целостным, то второй пункт теоремы не верен. Например, в кольце $\mathbb{Z}_4[x]$ выполнено $\deg(2x + 1) = 1$, но $(2x + 1)^2 = 1$ и $\deg 1 = 0$.

Задача 1. Найдите обратимый многочлен положительной степени в $\mathbb{Z}_6[x]$.

Следствие 1. Кольцо многочленов над целостным кольцом целостное.

Доказательство. Если $fg = 0$, то это противоречит $\deg fg = \deg f + \deg g$. \square

Наша цель – доказать следующую теорему.

Теорема 2 (основная теорема алгебры). Любой многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ положительной степени имеет комплексный корень, то есть число $z_0 \in \mathbb{C}$ такое, что $f(z_0) = 0$.

Для доказательства нам понадобятся следующие понятия из матанализа над \mathbb{C} .

Определение 2. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда ε -окрестность точки z_0 – это

$$U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Определение 3. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ – последовательность комплексных чисел. Будем говорить, что она имеет предел $w \in \mathbb{C}$, при $n \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n > N$ выполнено $z_n \in U_\varepsilon(w)$.

Лемма 2. Пусть $z_j = x_j + iy_j$ и $w = u + iv$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = v. \end{cases}$

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_i - u)^2 + (y_i - v)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_i - u)^2 + (y_i - v)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = u; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = v. \end{cases}$$

\square

Следствие 2. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n = w'$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + z'_n) = w + w'$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n z'_n) = ww'$.

Доказательство. По условию $x_n \rightarrow u$, $y_n \rightarrow v$, $x'_n \rightarrow u'$, $y'_n \rightarrow v'$.

Тогда, $z_n + z'_n = (x_n + x'_n) + i(y_n + y'_n)$. Но $x_n + x'_n \rightarrow u + u'$, $y_n + y'_n \rightarrow v + v'$. Значит, $z_n + z'_n \rightarrow w + w'$.

Аналогично, $z_n z'_n = (x_n + iy_n)(x'_n + iy'_n) = (x_n x'_n - y_n y'_n) + i(x_n y'_n + x'_n y_n)$. Но $(x_n x'_n - y_n y'_n) \rightarrow uu' - vv'$, $(x_n y'_n + x'_n y_n) \rightarrow uv' + u'v$. Отсюда

$$z_n z'_n \rightarrow (uu' - vv') + i(uv' + u'v) = ww'.$$

□

Определение 4. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – функция. Тогда $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = c \in \mathbb{C}$, если для каждого $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ найдется $\delta > 0 \in \mathbb{R}$ такое, что при $z \in U_\delta(w)$ выполнено $f(z) \in U_\varepsilon(c)$.

Совершенно аналогично утверждениям для последовательностей доказываются следующие утверждения.

Лемма 3. Пусть $c = a + ib$. Тогда $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = c \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \rightarrow w} \operatorname{Re}(f(z)) = a; \\ \lim_{z \rightarrow w} \operatorname{Im}(f(z)) = b. \end{cases}$

Замечание 2. В предыдущей лемме безусловно нужно определить предел для функции $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Определим это понятие так: $\lim_{z \rightarrow w} h(z) = y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $z \in U_\delta(w)$ выполнено $|h(z) - y| < \varepsilon$.

Следствие 3. Пусть $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = c$ и $\lim_{z \rightarrow w} g(z) = d$. Тогда $\lim_{z \rightarrow w} (f(z) + g(z)) = c + d$ и $\lim_{z \rightarrow w} (f(z)g(z)) = cd$.

Определение 5. Функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *непрерывной* в точке w , если $\lim_{z \rightarrow w} f(z) = f(w)$.

Из доказанного выше следует следующая лемма.

Лемма 4. Сумма и произведение непрерывных функций – это непрерывная функция.

Следствие 4. Многочлен $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ задает непрерывную функцию $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Определение 6. Подмножество $L \subset \mathbb{C}$ называется *открытым*, если для любого $z \in L$ существует $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ такой, что $U_\varepsilon(z) \subset L$. Подмножество $S \subset \mathbb{C}$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{C} \setminus S$ открыто.

Лемма 5. Пусть S замкнуто. Тогда если $z_i \in S$ при всех i и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$, то $w \in S$.

Доказательство. Предположим $w \notin S$. Тогда найдется $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ такой, что $U_\varepsilon(w) \cap S = \emptyset$. Однако начиная с некоторого номера $z_n \in U_\varepsilon(w)$. Противоречие. □

Определение 7. Подмножество $K \subset \mathbb{C}$ называется *компактом*, если K замкнуто и ограничено, то есть существует $N \in \mathbb{R}$ такое, что $K \subset \{z : |z| < N\}$.

Лемма 6. Из любой последовательности в компакте K можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть есть последовательность $z_n = x_n + iy_n \in K$. Тогда последовательность x_n ограничена, а значит, можно найти такую подпоследовательность в z_n , что x_n для нее сходятся. Можно считать, что это верно для всей $\{z_n\}$. Аналогично, последовательность y_n ограничена, а значит, мы можем перейти к подпоследовательности, в которой $\{y_n\}$ сходятся. Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ для этой подпоследовательности имеют предел, то и сама подпоследовательность имеет предел. В силу замкнутости K , предел лежит в K . □

Теорема 3. Непрерывная функция $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ достигает на компакте K минимального значения.

Доказательство. Пусть $M = \inf_{z \in K} h(z)$. Тогда существует последовательность $z_n \in K$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = M$. Выберем из этой последовательности сходящуюся подпоследовательность. Так как функция непрерывна, ее значение в предельной точке этой подпоследовательности равно M . □

Лемма 7 (о возрастании модуля). Пусть $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ – многочлен положительной степени. Тогда $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$. То есть для каждого $C \in \mathbb{R}$ существует $D \in \mathbb{R}$ такое, что при $|z| > D$ выполнено $|f(z)| > C$.

Доказательство. Заметим, что $|z| \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{z} \rightarrow 0$.

Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right).$$

Тогда

$$|f(z)| = |z^n| \cdot \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right|.$$

Но при $|z| \rightarrow \infty$ выполнено $\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \rightarrow 0$. Значит, существует такое $P \in \mathbb{R}$, что при $|z| > P$ выполнено

$$\left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| < \frac{|a_n|}{2}.$$

Для модулей комплексных чисел выполнено неравенство треугольника (модуль – длина вектора):

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Отсюда

$$\left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right| \geq |a_n| - \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| > |a_n| - \frac{|a_n|}{2} > \frac{|a_n|}{2}.$$

Тогда $|f(z)| > |z^n| \cdot \frac{|a_n|}{2} > D^n \frac{|a_n|}{2}$. Если D таково, что $D^n \frac{|a_n|}{2} > C$, то $|f(z)| > C$. \square

Лемма 8 (Лемма Даламбера). Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) \in \mathbb{C}$, $\deg f(z) > 0$ и пусть $f(z_0) \neq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ существует $z \in U_\varepsilon(z_0)$ такое, что $|f(z)| < |f(z_0)|$.

Эту лемму мы докажем на следующей лекции. А пока что мы докажем основную терему алгебры, используя данную лемму.

Теорема 4 (Основная теорема алгебры). Любой многочлен $f \in \mathbb{C}[z]$ положительной степени имеет комплексный корень, то есть число $w \in \mathbb{C}$ такое, что $f(w) = 0$.

Доказательство. По лемме о возрастании модуля существует $D \in \mathbb{R}$ такое, что при $|z| > D$ выполнено $|f(z)| > |f(0)|$. Рассмотрим круг $K = \{|z| \leq 2D\}$. Это замкнутое и ограниченное множество, то есть компакт. Значит, существует точка $w \in K$ в которой достигается минимум функции $|f(z)|$. Заметим, что w не лежит на границе K , так как на границе данная функция больше, чем в точке $0 \in K$. Значит, существует $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ такой, что $U_\varepsilon(w) \subset K$. Если $f(w) = 0$, то корень найден. Допустим, что $f(w) \neq 0$. Тогда по лемме Даламбера существует $w' \in U_\varepsilon(w)$ такое, что $|f(w')| < |f(w)|$. Но $w' \in K$. Получаем противоречие с выбором w . \square