

Лекция 2

Определение 1. Матрица M имеет улучшенный ступенчатый вид, если

- 1) она имеет ступенчатый вид,
- 2) лидеры всех строк равны 1,
- 3) над лидерами в их столбцах стоят нули.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * \dots * & 0 & * \dots * & 0 & * \dots * & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * \dots * & 0 & * \dots * & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & * \dots * & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Есть следующая **вариация метода Гаусса**. В ней прямой ход несколько длиннее: мы приводим расширенную матрицу системы не к ступенчатому, а к улучшенному ступенчатому виду. Улучшенный ступенчатый вид легко получить из ступенчатого: надо поделить все ненулевые строки на их лидеры, а затем вычесть нижние строки из более верхних с подходящими коэффициентами. После того, как мы получили улучшенный ступенчатый вид, мы переходим к обратному ходу метода Гаусса. Если есть экзотическое уравнение, то система несовместна. Если экзотического уравнения нет, то решение есть. Мы разделяем переменные на главные и свободные так же, как в обычном методе Гаусса. Для того, чтобы выразить главные переменные через свободные, нужно лишь перенести все свободные переменные в каждом уравнении в правую часть.

Пример 1. Решим систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу СЛУ

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 11 \end{array} \right)$$

Приведем данную матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразованиями:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 11 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Главными неизвестными являются x_1 и x_2 , а свободными – x_3 , x_4 и x_5 . Перепишем в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 2; \\ x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Перенесем свободные переменные в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4; \\ x_2 = 1 - x_4. \end{cases}$$

Ответ: x_3 и x_4 любые, $x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4$, $x_2 = 1 - x_4$.

Задача 1. * Докажите, что для каждой матрицы M существует ровно одна улучшенная ступенчатая матрица, к которой можно привести M элементарными преобразованиями.

Теперь обсудим, какие "числа" могут быть коэффициентами в СЛУ, чтобы метод Гаусса проходил без изменений. Если посмотреть на то, что нам нужно от чисел, то мы увидим, что данные числа нужно уметь складывать, вычитать, умножать и делить и чтобы данные операции удовлетворяли некоторым привычным для нас тождествам. Введем понятие поля.

Определение 2. Поле – это множество F – с двумя операциями: сложением $+$: $F \times F \rightarrow F$ и умножением $\cdot$: $F \times F \rightarrow F$, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

- 1) для любых $a, b, c \in F$ выполнено $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 2) существует $0 \in F$ такой, что для каждого $f \in F$ верно $0 + f = f + 0 = f$;

- 3) для каждого $f \in F$ существует $-f \in V$ такой, что $f + (-f) = (-f) + f = 0$;
- 4) для любых $a, b \in F$ выполнено $a + b = b + a$;
- 5) для любых $a, b, c \in F$ выполнено $a(b + c) = ab + ac$;
- 6) для любых $a, b, c \in F$ выполнено $(a + b)c = ac + bc$;
- 7) для любых $a, b, c \in F$ выполнено $(ab)c = a(bc)$;
- 8) для любых $a, b \in F$ выполнено $ab = ba$;
- 9) существует $e \neq 0 \in F$ такой, что для каждого $f \in F$ верно $ef = fe = f$;
- 10) для каждого $f \neq 0 \in F$ существует $f^{-1} \in F$ такой, что $ff^{-1} = f^{-1}f = e$.

Замечание 1. Безусловно, при наличии аксиомы 4) можно было бы в аксиомах 2 и 3 писать только половину равенств. Также при наличии аксиомы 8) можно было оставить только одну из аксиом 5) и 6), вторая будет следовать. Такая избыточная запись связана с тем, что в дальнейшем нам будет интересно рассматривать не только поля, но и другие структуры, в которых мы будем убирать часть аксиом, а оставшиеся лучше записывать в том виде, в котором они записаны сейчас. Но это замечание на будущее. А пока что абсолютно верно, что поле можно задать следующими аксиомами:

- 1) для любых $a, b, c \in F$ выполнено $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 2) существует $0 \in F$ такой, что для каждого $f \in F$ верно $0 + f = f$;
- 3) для каждого $f \in F$ существует $-f \in V$ такой, что $f + (-f) = 0$;
- 4) для любых $a, b \in F$ выполнено $a + b = b + a$;
- 5) для любых $a, b, c \in F$ выполнено $a(b + c) = ab + ac$;
- 6) для любых $a, b, c \in F$ выполнено $(ab)c = a(bc)$;
- 7) для любых $a, b \in F$ выполнено $ab = ba$;
- 8) существует $e \neq 0 \in F$ такой, что для каждого $f \in F$ верно $ef = f$;
- 9) для каждого $f \neq 0 \in F$ существует $f^{-1} \in F$ такой, что $ff^{-1} = e$.

Примерами полей служат рациональные числа с операциями сложения и умножения и вещественные числа с операциями сложения и умножения. Но постепенно у нас будут возникать и другие примеры полей. При этом надо понимать, что мы не накладываем никаких условий на природу элементов поля, а также никаких условий на операции, кроме указанных аксиом.

Упражнение 1. Приведем менее очевидный пример поля. Фиксируем простое число p . Рассмотрим множество $\mathbb{Z}_p$, состоящее из чисел $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, и введем следующие операции сложения и умножения. Для того, чтобы сложить 2 элемента, мы складываем их как целые числа, а затем берем остаток при делении на p . Аналогично, чтобы умножить 2 элемента, мы умножаем их как целые числа, а затем берем остаток при делении на p . Все аксиомы, кроме последней легко проверяются. Последняя не столь очевидна, скоро ее докажут, например, в курсе теории чисел. Но можно самостоятельно сейчас доказать это в качестве задачи. Это не очень сложно.

Если мы будем считать, что все коэффициенты и правые части СЛУ лежат в поле F , то метод Гаусса даст способ найти все решения из поля F . Единственное, что изменится в предыдущей теории при переходе от $\mathbb{R}$ к произвольному полю F – это утверждение, что если есть свободные переменные, то решений бесконечно много. В самом деле, если есть свободная переменная, то она принимает любые значения из F , однако, если F конечно, то это не дает бесконечного множества решений. Но как минимум можно сказать, что если есть свободная переменная в совместной системе, то решений хотя бы 2. В самом деле, так как $e \neq 0$, в любом поле хотя бы 2 элемента.

Замечание 2. В дальнейшем мы будем стараться развивать теорию имея в виду, что "числа" принадлежат некоторому полю F . Однако зачастую слушатель практически ничего не потеряет, если будет считать, что $F = \mathbb{R}$.

Предложение 1. Если в совместной системе количество уравнений меньше количества переменных, то она имеет хотя бы два решения (а в случае $F = \mathbb{R}$ – бесконечно много).

Доказательство. Так как система совместна, то экзотических уравнений нет. Значит, есть только 2 варианта: либо матрица строго ступенчатая и решение единственное, либо матрица не строго ступенчатая и есть свободная переменная. Во втором случае СЛУ имеет хотя бы два решения (а в случае $F = \mathbb{R}$ – бесконечно много). Однако, если количество уравнений m меньше количества переменных n , то лидеров в ступенчатом виде матрицы $\tilde{A}$ не больше, чем строк (меньше может быть из-за нулевых строк), то есть, чем m . Следовательно, количество лидеров в ступенчатом виде матрицы $\tilde{A}$

строга меньше n . А это значит, что найдется переменная, в столбце которой нет лидера. Тогда эта переменная свободная. $\square$

Определение 3. СЛУ называется *однородной*, если все правые части во всех уравнениях равны нулю.

Замечание 3. Однородная система всегда совместна. Действительно, в качестве решения подходит $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Следствие 1. Если в однородной системе количество уравнений меньше количества переменных, то она обязательно имеет ненулевое решение (то есть решение не из всех нулей).

Определение 4. Векторное пространство над полем F – это множество V – с двумя операциями: сложением $+: V \times V \rightarrow V$ и умножением на число $\cdot: F \times V \rightarrow V$, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

- 1) для любых $a, b, c \in V$ выполнено $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 2) существует $\bar{0} \in V$ такой, что для каждого $v \in V$ верно $\bar{0} + v = v + \bar{0} = v$;
- 3) для каждого $v \in V$ существует $-v \in V$ такой, что $v + (-v) = (-v) + v = \bar{0}$;
- 4) для любых $a, b \in V$ выполнено $a + b = b + a$;
- 5) для любых $\lambda \in F$ и $v, w \in V$ выполнено $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$;
- 6) для любых $\lambda, \mu \in F$ и $v \in V$ выполнено $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$;
- 7) для любых $\lambda, \mu \in F$ и $v \in V$ выполнено $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$;
- 8) для каждого $v \in V$ выполнено $e \cdot v = v$.

Замечание 4. Снова связи с выполнением свойства 4 достаточно требовать только "половину" свойств 2 и 3, то есть $v + \bar{0} = v$ и $(-v) + v = \bar{0}$. Однако здесь аксиомы 5) и 6) не следуют друг из друга.

Элементы векторного пространства называются *векторами* (вне зависимости от их природы).

Пример 2. Геометрические векторы на прямой/на плоскости/в пространстве с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число образуют векторное пространство (над $\mathbb{R}$).

Пример 3. Пространство F^n , которое называется арифметическим пространством или пространством строк – это множество строк

$$F^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in F\},$$

со следующими операциями.

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n);$$

$$\lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n).$$

Пример 4. Многочлены $\mathbb{R}[x]$ от переменной x с обычными операциями сложения и умножения многочлена на число образуют векторное пространство (над $\mathbb{R}$).

Пример 5. Функции на отрезке $[a, b]$ со значениями в $\mathbb{R}$ образуют векторное пространство относительно операций $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$. (над $\mathbb{R}$)

Пример 6. Фиксируем натуральные числа m и n . Матрицы $m \times n$ с коэффициентами из F образуют векторное пространство над F со следующими операциями

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

и

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Замечание 5. На самом деле с точки зрения сложения и умножения на число матрица мало отличается от строки (из F^{mn}). Если приставить строки матрицы друг к другу и получить одну длинную строку, то сложение и умножение на число этих длинных строк будет таким же, как у матриц. Наоборот, строки – это частный случай матриц, то есть матрицы $1 \times n$.

Замечание 6. В каждом из предыдущих примеров вообще говоря нужно проверять, что выполняются аксиомы 1-8. Но все эти проверки очень просты и следуют просто из свойств сложения и умножения чисел. Все мы их делать не будем. Давайте сделаем проверку только для примера 3.

$$1) ((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)) + (c_1, \dots, c_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) + (c_1, \dots, c_n) = ((a_1 + b_1) + c_1, \dots, (a_n + b_n) + c_n) = (a_1 + (b_1 + c_1), \dots, a_n + (b_n + c_n)) = (a_1, \dots, a_n) + (b_1 + c_1, \dots, b_n + c_n) = (a_1, \dots, a_n) + ((b_1, \dots, b_n) + (c_1, \dots, c_n)).$$

2) В качестве нулевого вектора можно взять $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Тогда

$$(a_1, \dots, a_n) + (0, \dots, 0) = (a_1 + 0, \dots, a_n + 0) = (a_1, \dots, a_n).$$

3) В качестве противоположного вектора к вектору $(a_1, \dots, a_n)$ подходит вектор $(-a_1, \dots, -a_n)$. Действительно,

$$(-a_1, \dots, -a_n) + (a_1, \dots, a_n) = ((-a_1) + a_1, \dots, (-a_n) + a_n) = (0, \dots, 0).$$

$$4) (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = (b_1 + a_1, \dots, b_n + a_n) = (b_1, \dots, b_n) + (a_1, \dots, a_n).$$

$$5) \lambda((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)) = \lambda(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = (\lambda(a_1 + b_1), \dots, \lambda(a_n + b_n)) = (\lambda a_1 + \lambda b_1, \dots, \lambda a_n + \lambda b_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) + (\lambda b_1, \dots, \lambda b_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n) + \lambda(b_1, \dots, b_n).$$

$$6) (\lambda + \mu)(a_1, \dots, a_n) = ((\lambda + \mu)a_1, \dots, (\lambda + \mu)a_n) = (\lambda a_1 + \mu a_1, \dots, \lambda a_n + \mu a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) + (\mu a_1, \dots, \mu a_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n) + \mu(a_1, \dots, a_n).$$

$$7) (\lambda\mu)(a_1, \dots, a_n) = ((\lambda\mu)a_1, \dots, (\lambda\mu)a_n) = (\lambda(\mu a_1), \dots, \lambda(\mu a_n)) = \lambda(\mu a_1, \dots, \mu a_n) = \lambda(\mu(a_1, \dots, a_n)).$$

$$8) 1 \cdot (a_1, \dots, a_n) = (1 \cdot a_1, \dots, 1 \cdot a_n) = (a_1, \dots, a_n).$$

Логика устройства алгебры как науки похожа на логику знакомой вам евклидовой геометрии. Есть некие объекты и аксиомы. Далее верными считаются только те высказывания, которые выводятся из аксиом.

Задача 2. Докажите, что аксиома 8 не выводится из аксиом 1-7.

Указание. Такие задачи обычно решаются следующим способом. Нужно привести пример некой структуры (то есть множества с двумя операциями сложения и умножения на число, пусть эти операции и будут заданы возможно странным образом) такой, чтобы выполнялись все аксиомы 1-7, но не выполнялась аксиома 8.

Задача 3. Придумайте a-priori более слабое условие, на которое можно заменить аксиому 8 так, чтобы при выполнении аксиом 1-7 и этого нового условия структура была векторным пространством.

Простейшие следствия из аксиом.

1) В любом векторном пространстве нулевой вектор единственный.

Доказательство. Допустим, что в векторном пространстве V есть два нулевых вектора: $\bar{0}_1$ и $\bar{0}_2$. Тогда $\bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2$. Первое равенство выполнено так как $\bar{0}_2$ – нулевой вектор, а второе – так как $\bar{0}_1$ – нулевой вектор.

2) Для любого вектора v противоположный вектор $-v$ единственный.

Доказательство. Пусть u и w – два противоположных к вектору v вектора. Имеем

$$u = u + (v + w) = (u + v) + w = w.$$

3) Для любого вектора v выполнено $0 \cdot v = \bar{0}$.

Доказательство. (способ 1) Пусть $0 \cdot v = w$. Рассмотрим $v + w = 1 \cdot v + 0 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = 1 \cdot v = v$. Теперь к обеим частям равенства $v + w = v$ прибавим вектор $-v$. Получим $w = \bar{0}$.

(способ 2) Имеем $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. К обеим частям равенства прибавим $-0 \cdot v$ и получим $\bar{0} = 0 \cdot v$.

4) Для любого числа λ выполнено $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$. **Упражнение:** докажите это утверждение.

5) Для любого вектора v выполнено $(-1) \cdot v = -v$.

Доказательство. $(-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = (-1 + 1) \cdot v = 0 \cdot v = \bar{0}$. Прибавим к обеим частям вектор $-v$ и получим $(-1) \cdot v = -v$.

6) Для любого вектора v выполнено $-(-v) = v$. **Упражнение:** докажите это утверждение.

7) Для любых векторов v и w выполнено $-(v + w) = (-v) + (-w)$. **Упражнение:** докажите это утверждение.

8) Если для числа λ и вектора v выполнено $\lambda v = \bar{0}$, то либо $\lambda = 0$, либо $v = \bar{0}$. (Имеется в виду, что может быть и то и другое одновременно.)

Доказательство. Допустим $\lambda \neq 0$. Тогда существует число $\frac{1}{\lambda}$. Имеем

$$\bar{0} = \frac{1}{\lambda} \bar{0} = \frac{1}{\lambda} (\lambda v) = \left(\frac{1}{\lambda} \lambda \right) v = 1 \cdot v = v.$$

Замечание 7. В дальнейшем нулевой вектор мы будем обозначать просто символом 0 . Из контекста всегда можно понять, имеется ли в виду нулевое число или нулевой вектор.