ЛЕКЦИЯ 3

Определение 1. Пусть $v_1, \dots, v_k$ – векторы из векторного пространства V , а $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – числа. *Линейная комбинация* векторов $v_1, \dots, v_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – это выражение

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k.$$

Значение этой линейной комбинации – это вектор из V .

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ и нетривиальной иначе (то есть если хотя бы один из коэффициентов не равен нулю).

Определение 2. Система векторов $\{v_1, \dots, v_k\}$ из векторного пространства называется *линейно зависимой* (ЛЗ), если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю. Иначе система называется *линейно независимой* (ЛНЗ).

Переформулировка: система $\{v_1, \dots, v_k\}$ ЛНЗ, если из $\sum \lambda_i v_i = 0$ следует $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Пусть $k = 1$. Система $\{v_1\}$ ЛЗ $\Leftrightarrow v_1 = \bar{0}$.

Пусть $k = 2$. Система $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ тогда и только тогда, когда $v_1 = cv_2$ или $v_2 = cv_1$.

Доказательство. Пусть $v_1 = cv_2$. Тогда $1 \cdot v_1 + (-c) \cdot v_2 = 0$ – нетривиальная линейная комбинация. То есть $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ. Аналогично, если $v_2 = cv_1$, то $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ.

Пусть теперь наоборот $\{v_1, v_2\}$ ЛЗ. То есть существуют $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ такие, что

$$\lambda v_1 + \mu v_2 = 0.$$

Если $\lambda \neq 0$, то

$$v_1 = -\frac{\mu}{\lambda} v_2.$$

Если же $\mu \neq 0$, то

$$v_2 = -\frac{\lambda}{\mu} v_1.$$

Чтобы проверить, верно ли, что $\{v_1, \dots, v_k\}$, $v_i \in \mathbb{R}^n$ ЛНЗ, нужно приравнять линейную комбинацию $\sum \lambda_i v_i$ к нулю, получить линейную систему и понять, есть ли у нее ненулевое решение.

Пример 1. Проверим, является ли ЛНЗ система $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 4, 6)\}$. Имеем

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 2, 3) + \lambda_3(2, 4, 6) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3)$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0; \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0; \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0. \end{cases} \quad \text{с матрицей} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Есть свободная неизвестная. $\Rightarrow$ Есть ненулевое решение. $\Rightarrow$ Система ЛЗ.

Замечание 1. Система всегда получается с матрицей, в которой данные векторы стоят по столбцам.

Свойства линейной зависимости.

Предложение 1. (Свойство 1). Пусть S и S' – две (конечные) системы векторов такие, что $S \subseteq S'$. Если система S ЛЗ, то система S' ЛЗ.

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ и $S' = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$. Так как S ЛЗ, существуют $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$ такие, что

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + 0v_{m+1} + \dots + 0v_n = 0.$$

И при этом $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$.

□

Переформулировка. Если S' ЛНЗ, то S ЛНЗ.

Предложение 2. (Свойство 2). Система $\{v_1, \dots, v_k\}$ ЛЗ тогда и только тогда, когда существует номер $1 \leq j \leq k$ такой, что v_j равен некоторой линейной комбинации остальных векторов.

Доказательство. Пусть

$$v_j = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_k v_k.$$

Тогда

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + (-1)v_j + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_k v_k = 0,$$

то есть $\{v_1, \dots, v_k\}$ ЛЗ.

Наоборот, пусть $\{v_1, \dots, v_k\}$ ЛЗ, то есть существует нетривиальная линейная комбинация

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k = 0.$$

Так как линейная комбинация нетривиальна, существует $\mu_j \neq 0$. Тогда

$$v_j = -\frac{\mu_1}{\mu_j} v_1 - \dots - \frac{\mu_{j-1}}{\mu_j} v_{j-1} - \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} v_{j+1} - \dots - \frac{\mu_k}{\mu_j} v_k.$$

□

Если вектор u равен некоторой линейной комбинации векторов $v_1, \dots, v_k$, то есть существуют такие $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, что

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k,$$

то говорят, что вектор u линейно выражается через векторы $v_1, \dots, v_k$.

Предложение 3. (Свойство 3. Уточнение свойства 2.) Пусть система $\{v_1, \dots, v_k\}$ ЛНЗ и пусть система $\{v_1, \dots, v_k, w\}$ ЛЗ. Тогда существует единственный набор чисел $\mu_1, \dots, \mu_k$ такой, что $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$.

Доказательство. Так как система $\{v_1, \dots, v_k, w\}$ ЛЗ, существуют не все нулевые числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda$ такие, что $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda w = 0$. Если $\lambda = 0$, то получаем нетривиальную линейную комбинацию $\{v_1, \dots, v_k\}$, равную 0. Противоречие. Значит, $\lambda \neq 0$. Тогда

$$w = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda} v_k.$$

Допустим, что $w = \sum \alpha_i v_i = \sum \beta_i v_i$. Тогда

$$0 = \sum \alpha_i v_i - \sum \beta_i v_i = \sum (\alpha_i - \beta_i) v_i.$$

Значит, для каждого j выполнено $\alpha_j = \beta_j$. □

Определение 3. Пусть S – бесконечная система векторов. Линейной комбинацией векторов S называется (конечная) линейная комбинация вида

$$\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n,$$

где λ_i – числа, $s_i \in S$.

Далее аналогично случаю конечной системы можно определить тривиальную/нетривиальную линейную комбинацию и ЛЗ/ЛНЗ системы.

Упражнение 1. Докажите свойства 1, 2 и 3 для бесконечных систем векторов.

Лемма 1 (Основная лемма о линейной зависимости). Пусть $\{v_1, \dots, v_n\}$ и $\{w_1, \dots, w_m\}$ – две системы векторов из векторного пространства V . Допустим, что каждый вектор v_i линейно выражается через систему $\{w_1, \dots, w_m\}$. Если $n > m$, то система векторов $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно зависима.

Доказательство. Так как векторы $v_1, \dots, v_n$ выражаются через систему $\{w_1, \dots, w_m\}$, существуют коэффициенты λ_{ij} такие, что

$$v_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} w_j.$$

Составим линейную комбинацию

$$\begin{aligned} \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n &= \sum_{i=1}^n \mu_i v_i = \sum_{i=1}^n \left(\mu_i \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} w_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\mu_i \lambda_{ij} w_j) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\mu_i \lambda_{ij} w_j) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_{ij} \right) w_j \end{aligned}$$

Равенство между 1 и 2 строками выполнено из-за того, что порядок суммирования по двум индексам можно менять. В самом деле: суммирование по i от 1 до n , а затем по j от 1 до m эквивалентно тому, что мы суммируем по всем парам (i, j) из некоторого прямоугольника $m \times n$ сначала по строкам, а затем – по столбцам. Такой же результат получится, если суммировать сперва по столбцам, а затем по строкам, то есть сначала по j от 1 до m а затем по i от 1 до n .

В конце предыдущей формулы мы получили линейную комбинацию векторов w_j . Она уж точно будет равна нулю, если все ее коэффициенты равны нулю. Докажем, что мы можем подобрать такие не все нулевые $\mu_1, \dots, \mu_n$, чтобы все коэффициенты $\sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_{ij}$ были нулевыми. В самом деле это однородная система с коэффициентами λ_{ij} и переменными μ_i . В этой системе n переменных и $m < n$ уравнений. Значит, эта система имеет ненулевое решение $(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Итак, для этого решения выполнено, что все коэффициенты $\sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_{ij}$ равны нулю, а значит, $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = 0$, то есть система $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно зависима. $\square$