

Лекция 4

Определение 1. Подмножество U в векторном пространстве V называется (векторным) *подпространством*, если U с теми же операциями является векторным пространством.

Замечание 1. Прежде, чем проверять то, что выполнены аксиомы, нужно убедиться, что операции на U определены корректно, то есть, что они не выводят за пределы этого подмножества.

Оказывается, что этого достаточно, чтобы подмножество было подпространством.

Теорема 1. Пусть $U \subset V$ – подмножество в векторном пространстве V . Тогда U – подпространство в V , если и только если выполнены следующие условия

- 1) для любых $u_1, u_2 \in U$ выполнено $u_1 + u_2 \in U$;
- 2) для любых $u \in U$ и $\lambda \in F$ выполнено $\lambda u \in U$.

Доказательство. Пусть U – подпространство в V . Тогда сумма двух его элементов лежит снова в U и умножение любого элемента на число лежит в U . (Просто потому, что операции определены на U .)

Наоборот, пусть выполнены условия 1) и 2). Они гарантируют, что на U корректно определены операция сложения и умножения на число.

Аксиомы 1, 4, 5, 6, 7 и 8 сразу следуют из того, что они выполнены на V .

Для выполнения аксиомы 2 нам нужно показать, что $\bar{0}$ (который существует в V) попадает в U . Возьмем $u \in U$. Тогда $0 \cdot u = \bar{0} \in U$.

Проверим выполнение аксиомы 3. Пусть $u \in U$. Тогда $-u = (-1) \cdot u \in U$. □

Пример 1. 1) В векторном пространстве векторов на плоскости (можно считать, что эти векторы все отложены от начала координат) подпространством является подмножество векторов, лежащих на прямой, проходящей через начало координат.

2) В векторном пространстве векторов на плоскости не является подпространством подмножество векторов, лежащих на прямой, не проходящей через начало координат.

3) В пространстве $\mathbb{R}^3$ подпространством является множество $U = \{(a, b, 0)\}$. Можно убедиться в том, что U – подпространство непосредственно, а можно сказать, что оно задано однородной СЛУ, состоящей из одного уравнения $\{x_3 = 0\}$.

Определение 2. Линейная оболочка системы векторов S – это множество всевозможных линейных комбинаций векторов из S . Обозначается линейная оболочка S через $\langle S \rangle$.

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \mid r \in \mathbb{N}, \lambda_i \in F, v_i \in S \right\}.$$

Теорема 2. Пусть S – система векторов в векторном пространстве V . Тогда подмножество $\langle S \rangle \subset V$ является подпространством.

Доказательство. Пусть $w = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \in \langle S \rangle$, здесь $v_i \in S$. Тогда

$$\alpha \cdot w = \sum_{i=1}^r \alpha \lambda_i v_i \in \langle S \rangle$$

Теперь пусть у нас есть две линейные комбинации из $\langle S \rangle$. Без ограничения общности мы можем считать, что в них вошли одинаковые векторы v_i (если в одной из линейных комбинаций вектор не присутствовал, то добавим его туда с коэффициентом ноль.) Имеем $w = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i, u = \sum_{i=1}^r \mu_i v_i \in \langle S \rangle$. Тогда

$$w + u = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^r \mu_i v_i = \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \mu_i) v_i \in \langle S \rangle.$$

□

Пример 2. Пусть $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$. Тогда

$$\langle S \rangle = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = \{ \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0) \} = \{ (\lambda_1, \lambda_2, 0) \} = \{ x_3 = 0 \}.$$

Теорема 3. Рассмотрим однородную СЛУ. Множество W ее решений является подпространством в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть A – матрица коэффициентов нашей СЛАУ. И пусть есть 2 решения $(y_1, \dots, y_n)$ и $(z_1, \dots, z_n)$ из W . Это значит, что для каждого j выполняется

$$a_{j1}y_1 + \dots + a_{jn}y_n = a_{j1}z_1 + \dots + a_{jn}z_n = 0.$$

Рассмотрим строку $(t_1, \dots, t_n) = (y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n) = (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{j1}t_1 + \dots + a_{jn}t_n &= a_{j1}(y_1 + z_1) + \dots + a_{jn}(y_n + z_n) = \\ &= (a_{j1}y_1 + \dots + a_{jn}y_n) + (a_{j1}z_1 + \dots + a_{jn}z_n) = 0. \end{aligned}$$

То есть $(t_1, \dots, t_n) \in W$.

Аналогично. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то обозначим $(s_1, \dots, s_n) = \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n) = (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n)$. Имеем

$$a_{j1}s_1 + \dots + a_{jn}s_n = a_{j1}\lambda y_1 + \dots + a_{jn}\lambda y_n = \lambda(a_{j1}y_1 + \dots + a_{jn}y_n) = 0.$$

То есть $(s_1, \dots, s_n) \in W$. □

Определение 3. Подсистема $S \subseteq V$ в векторном пространстве V называется *полной*, если любой вектор из V выражается как линейная комбинация векторов из S .

Переформулировка. $S \subseteq V$ – полная подсистема тогда и только тогда, когда $\langle S \rangle = V$. В самом деле, так как любой вектор $v \in V$ является линейной комбинацией векторов из S , то $V \subseteq \langle S \rangle$. С другой стороны рассматривая линейные комбинации векторов из S мы не выйдем за пределы V , поэтому $V \supseteq \langle S \rangle$.

Определение 4. Базис векторного пространства V – это линейно независимая полная системы векторов $S \subseteq V$.

Теорема 4. Пусть B – подсистема векторов в пространстве V . Следующие условия эквивалентны:

- (1) B – базис V ;
- (2) B – это максимальная по включению линейно независимая подсистема векторов; (То есть B ЛНЗ и для каждого $v \in V \setminus B$ выполнено $B \cup \{v\}$ ЛЗ.)
- (3) B – минимальная по включению полная подсистема; (То есть система B полная, но если из нее убрать хотя бы один вектор, она перестанет быть полной.)
- (4) каждый вектор из V выражается как линейная комбинация векторов из B , причем единственным образом.

Доказательство. $2 \Rightarrow 1$. Пусть B – максимальная по включению линейно независимая подсистема векторов. Тогда B ЛНЗ по определению. Нужно лишь доказать, что B – полная подсистема. Возьмем $v \in V \setminus B$. Тогда система $B \cup \{v\}$ ЛЗ. По свойству 3 линейной зависимости вектор v является линейной комбинацией векторов из B .

$1 \Rightarrow 3$. По условию система B полная. Допустим, что для некоторого $w \in B$ система $B \setminus \{w\}$ также является полной. Но тогда w линейно выражается через элементы $B \setminus \{w\}$. То есть найдутся $e_1, \dots, e_k \in B$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$ такие, что $w = \sum \lambda_i e_i$. Но тогда B линейно зависима по свойству 2 линейной зависимости.

$3 \Rightarrow 4$. Пусть B – минимальная по включению полная подсистема. Тогда по определению полной подсистемы каждый вектор из V линейно выражается через B . Допустим, что есть вектор $v \in V$ такой, что он выражается двумя различными способами:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i, \quad e_i \in B; \lambda_i, \mu_i \in F.$$

Получаем $0 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) e_i$ – нетривиальная линейная комбинация. По свойству 2 найдется e_j , который выражается через остальные. Тогда система $B \setminus \{e_j\}$ полная. В самом деле, если у нас есть элемент $v \in V$, то так как система B полная, его можно представить как линейную комбинацию векторов из B . Если в эту линейную комбинацию вошел вектор e_j , то подставим его выражение через остальные. Получим линейную комбинацию векторов из $B \setminus \{e_j\}$. Противоречие.

$4 \Rightarrow 2$. Допустим, что B ЛЗ. Тогда по свойству 2 существует $w \in B$, такой, что

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \quad e_i \in B \setminus \{w\}, \lambda_i \in F.$$

Получаем два линейных выражения w через B . Второе имеет вид $w = 1w$. Противоречие. Значит, B ЛНЗ.

Рассмотрим $v \in V \setminus B$. По условию вектор v линейно выражается через B . Тогда по свойству 2 $B \cup \{v\}$ ЛЗ. $\square$

Определение 5. По пункту 4 из предыдущей теоремы, если фиксирован базис векторного, то любой вектор v однозначно представляется в виде линейной комбинации базисных векторов. Коэффициенты этого разложения будем называть *координатами* вектора v в базисе B . Если базис конечный и состоит из n векторов, то координаты образуют строку из F^n .

Пример 3. • Любой ненулевой вектор e на прямой образует базис. Координата вектора v – это коэффициент пропорциональности v и e .

- Любые 2 неколлинеарных вектора на плоскости образуют базис.
- Любые 3 некопланарных вектора в пространстве образуют базис.
- Стандартный базис в F^n :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Координаты вектора $(x_1, \dots, x_n)$ в этом базисе – это $x_1, \dots, x_n$.

Докажем, что стандартный базис в самом деле является базисом в $\mathbb{R}^n$. Действительно,

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Если $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Это доказывает, что $\{e_1, \dots, e_n\}$ – ЛНЗ система. Пусть теперь нам дан вектор $v = (x_1, \dots, x_n) \in F^n$. Тогда $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Это доказывает, что $\{e_1, \dots, e_n\}$ – полная система. Итак, $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис.

Определение 6. Векторное пространство V называется *конечномерным*, если существует конечный набор векторов $v_1, \dots, v_k$ такой, что $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Далее в течение всего курса, если не оговорено противное, мы будем предполагать все пространства конечномерными.

Лемма 1. В конечномерном пространстве любую линейно независимую систему можно дополнить до конечного базиса.

Доказательство. Пусть $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. И пусть $\{e_1, \dots, e_m\}$ – линейно независимая подсистема в V . Тогда, если эта система максимальна по включению, то она базис. Иначе существует $e_{m+1} \in V$ такой, что $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}$ – линейно независимая система. Будем так добавлять векторы в систему пока можем. Бесконечно этот процесс длиться не может, так как по ОЛЛЗ при $m > k$ мы получим линейно зависимую систему. $\square$

Следствие 1. Любое ненулевое конечномерное пространство имеет конечный базис.

Доказательство. Возьмем систему $\{e \neq 0\}$ и дополним ее до базиса. $\square$

Замечание 2. Для нулевого пространства естественно считать, что в нем пустое множество векторов образует базис.

Лемма 2. В ненулевом конечномерном пространстве из любой полной системы можно выбрать базис.

Доказательство. Рассмотрим конечную полную систему (которая существует так как пространство конечномерно). Если она линейно независима, то это базис. Если она линейно зависима, то один из векторов выражается через остальные. Тогда можно убрать этот вектор и система останется полной. Так делаем несколько раз. Поскольку начальное количество векторов конечно, на каком-то шаге либо уберем все векторы (это случай нулевого пространства), либо получим базис. $\square$

Замечание 3. Из этой леммы также следует следствие 1.