ЛЕКЦИЯ 5

Определение 1. Пусть V – векторное пространство. *Размерностью* V называется количество (мощность) векторов в базисе пространства V . Размерность V обозначается $\dim V$.

Замечание 1. Вообще говоря данное определение может оказаться противоречивым. То есть теоретически может оказаться, что есть 2 базиса V , в которых различное количество векторов. Объяснение про какое-либо определение, что оно не противоречиво, называется *проверкой корректности*.

Теорема 1 (Проверка корректности определения размерности). Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис V . (Мы знаем, что в конечномерном пространстве есть хотя бы один конечный базис.) Тогда в любом другом базисе V тоже n векторов.

Доказательство. Пусть B – другой базис S . Тогда, если $|B| > n$, то векторы из B зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Наоборот, если $n > |B|$, то векторы $\{e_1, \dots, e_n\}$ зависимы по основной лемме о линейной зависимости. $\square$

Пример 1. $\dim \mathbb{R}^n = n$. В самом деле, стандартный базис содержит n векторов.

Определение 2. Рангом подсистемы $S \subset V$ (в конечномерном пространстве V) называется максимальное количество линейно независимых векторов в S . Ранг S обозначается $\text{rk } S$.

Лемма 1. Ранг системы векторов S равен размерности ее линейной оболочки $\langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть B – максимальная (по мощности) ЛНЗ система в S . Докажем, что B – базис $\langle S \rangle$. Для этого нужно доказать, что система полная. В самом деле сперва докажем, что любой вектор из S линейно выражается через B . Пусть это не так и вектор $s \in S$ не выражается через B . Тогда система $B \cup \{s\}$ ЛНЗ по 3 свойству линейной зависимости. Противоречие. Теперь возьмем произвольный вектор $v \in \langle S \rangle$. Он выражается через конечное число векторов из S . При этом каждый из этих векторов выражается через B . Подставим эти выражения в выражение для v . Получаем, что в итоге v линейно выражается через B .

Итак, $\text{rk } S = |B| = \dim \langle S \rangle$. $\square$

Пусть A – матрица $m \times n$ с элементами из поля F .

Определение 3. *Строчным рангом* A называется ранг системы ее строк в F^n . Аналогично, *столбцовым рангом* A называется ранг системы ее столбцов в F^m . (Формально в F^m лежат строки, а не столбцы, но ясно, что расположив столбец горизонтально мы получим строку.)

Определение 4. *Ступенчатым рангом* матрицы A мы называли число ненулевых строк в ее ступенчатом виде (то есть в ступенчатом виде, к которому матрицу можно привести элементарными преобразованиями строк).

Замечание 2. Последнее определение снова нуждается в проверке корректности. Вообще говоря, не ясно, почему у матрицы нет двух различных ступенчатых видов с различным числом ненулевых строк.

Теорема 2. Для любой матрицы A ее строчный, столбцовый и ступенчатый ранги совпадают.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из следующих трех лемм.

Лемма 2 (Лемма А). *Строчный ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк.*

Лемма 3 (Лемма Б). *Столбцовый ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк.*

Лемма 4 (Лемма В). *Для улучшенной ступенчатой матрицы все три вида ранга совпадают.*

В самом деле, мы знаем, что любую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк, а затем можно довести до улучшенного ступенчатого вида с тем же количеством строк.

При этих преобразованиях каждый вид ранга (строчный/столбцовый) не меняется. А в конце они совпадают и совпадают с количеством ненулевых строк в улучшенном ступенчатом виде. Значит, они изначально совпадали. При этом, получаем, что любой ступенчатый вид имеет количество ненулевых строк равное строчному рангу матрицы A . Следовательно, ступенчатый вид матрицы определен корректно. $\square$

Теперь докажем эти три леммы.

Доказательство леммы А. При элементарном преобразовании строк мы переходим от матрицы A к матрице A' . Заметим, что строки A' – линейные комбинации строк A . В самом деле, почти все строки матрицы A' просто совпадают со строками матрицы A . Для преобразования 1 типа есть только одна строка A' , которая не совпадает со строкой A , то она является линейной комбинацией двух строк A . Для элементарного преобразования 2 типа все строки сохраняются, просто меняется их порядок. При элементарном преобразовании 3 типа одна строка умножается на $c \neq 0$. При этом данная строка A' снова линейная комбинация строк A (в эту линейную комбинацию входит только 1 строка). Пусть B – базис системы строк матрицы A , а B' – базис системы строк матрицы A' . Тогда каждый вектор из B' линейно выражается через B . Так как B' ЛНЗ по ОЛЛЗ выполнено $|B'| \leq |B|$ (неравенство на количество векторов в базисах). Однако, так как элементарные преобразования обратимы и обратные к ним также элементарные преобразования, выполнено и противоположное неравенство $|B| \leq |B'|$. Отсюда $|B'| = |B|$, то есть строковый ранг A и A' совпадает. $\square$

Замечание 3. Можно так переговорить это доказательство. При элементарных преобразованиях строк векторное пространство $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$ не меняется, где $A_1, \dots, A_m$ – строки матрицы A . Действительно, при переходе от A к A' все строки новой матрицы выражаются через старые, то есть лежат в $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$. Это означает $\langle A_1, \dots, A_m \rangle \subseteq \langle A'_1, \dots, A'_m \rangle$. Но так как элементарные преобразования обратимы, верно и включение в обратную сторону. Получаем $\langle A_1, \dots, A_m \rangle = \langle A'_1, \dots, A'_m \rangle$. Поскольку строчный ранг равен размерности линейной оболочки строк, отсюда следует утверждение леммы A .

Доказательство леммы Б. Докажем, что столбцовый ранг не меняется при элементарных преобразованиях. Пусть столбцы $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_k)}$ – базис системы столбцов матрицы A . Покажем, что столбцы $A'^{(i_1)}, \dots, A'^{(i_k)}$ образуют базис системы столбцов матрицы A' . Для этого докажем, что если выполнено

$$\lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} = 0,$$

то выполнено и

$$\lambda_1 A'^{(1)} + \dots + \lambda_n A'^{(n)} = 0.$$

В самом деле равенство

$$\lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} = 0$$

означает, что для каждого i выполнено

$$\lambda_1 a_{i1} + \dots + \lambda_n a_{in} = 0.$$

Если элементарное преобразование, переводящее A в A' не затрагивало i -ю строку, то равенство

$$\lambda_1 a'_{i1} + \dots + \lambda_n a'_{in} = 0$$

также будет верным. Если это было элементарное преобразование 2 типа, то строки и данные равенства переставились, но остались верными для всех i . Если это было элементарное преобразование 3 типа, то равенство $\lambda_1 a'_{i1} + \dots + \lambda_n a'_{in} = 0$ получается из аналогичного для матрицы A умножением на c . Пусть теперь A переводится в A' элементарным преобразованием 1 типа, которое прибавляет j -ю строку с коэффициентом λ к i -ой. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_1 a'_{i1} + \dots + \lambda_n a'_{in} &= \lambda_1 (a_{i1} + \lambda a_{j1}) + \dots + \lambda_n (a_{in} + \lambda a_{jn}) = \\ &= \lambda_1 a_{i1} + \dots + \lambda_n a_{in} + \lambda (\lambda_1 a_{j1} + \dots + \lambda_n a_{jn}) = 0. \end{aligned}$$

Итак, в любом случае мы доказали, что из равенства

$$\lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} = 0,$$

следует равенство

$$\lambda_1 A'^{(1)} + \dots + \lambda_n A'^{(n)} = 0.$$

Однако, так как элементарные преобразования обратимы и обратные также являются элементарными преобразованиями, из равенства

$$\lambda_1 A'^{(1)} + \dots + \lambda_n A'^{(n)} = 0,$$

следует равенство

$$\lambda_1 A^{(1)} + \dots + \lambda_n A^{(n)} = 0.$$

Сформулируем это так: система столбцов в матрице A' линейно зависима тогда и только тогда, когда система столбцов с теми же номерами в матрице A линейно зависима. Отсюда следует, что максимальная линейно независимая система столбцов в обеих матрицах состоит из одинакового количества столбцов. То есть столбцовые ранги у A и A' совпадают. $\square$

Доказательство леммы В. Пусть M – матрица в улучшенном ступенчатом виде. Строчный ранг матрицы M – это максимальное количество линейно независимых строк в M . Ясно, что среди этих строк не может быть нулевой строки. Значит, строчный ранг матрицы M не превосходит количество ненулевых строк. Докажем, что все ненулевые строки M образуют линейно независимую систему. Тогда система из всех ненулевых строк будет максимальной ЛНЗ подсистемой в системе строк M . Рассмотрим линейную комбинацию

$$v = \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_r M_r$$

всех ненулевых строк матрицы M . Пусть лидер i -ой строки M стоит в j -ом столбце. Тогда в остальных строках в j -ом столбце стоят нули. Значит, в векторе v на j -ом месте стоит λ_j . Если $v = 0$, то $\lambda_j = 0$. Так как это верно для каждого j , получаем, что ненулевые строки M линейно независимы.

Рассмотрим теперь столбцы матрицы M . Начиная с $(r + 1)$ -го места в каждом столбце M стоят нули. Рассмотрим столбцы M , которые проходят через лидеры строк. Эти столбцы имеют вид

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где единица стоит на 1-ом, 2-ом, ..., r -ом месте. Линейная комбинация данных столбцов с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ равна

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\sum \lambda_i e_i = 0$ тогда и только тогда, когда все λ_i равны нулю. То есть $\{e_1, \dots, e_r\}$ – линейно независимая система. С другой стороны любой столбец матрицы M имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

а потому линейно выражается через $e_1, \dots, e_r$. Таким образом $\{e_1, \dots, e_r\}$ – полная подсистема в системе столбцов M . Итак, $\{e_1, \dots, e_r\}$ максимальная линейная независимая система столбцов M . Отсюда столбцовый ранг M равен r , то есть совпадает со строчным и ступенчатым рангом. $\square$

Определение 5. Пусть A – матрица $m \times n$. Матрица $B = A^T$ размера $n \times m$ называется *транспонированной* к матрице A , если

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Ясно, что $(A^T)^T = A$.

Лемма 5. *Выполнено равенство $\text{rk } A^T = \text{rk } A$.*

Доказательство. Столбцы A^T – это строки A . Соответственно, ранг системы столбцов A^T равен рангу системы строк A . $\square$

Определение 6. *Элементарные преобразования столбцов* – это преобразования, аналогичные элементарным преобразованиям строк, сделанные со столбцами. А именно:

- 1 тип: прибавляем i -й столбец к j -му с коэффициентом λ . (Все столбцы, кроме j -го не меняются.)
- 2 тип: меняем i -й и j -й столбцы местами.
- 3 тип: умножаем один столбец на ненулевое число.

Теорема 3 (Свойства ранга). *Пусть A – матрица $m \times n$. Тогда*

- $\text{rk } A \leq m$;
- $\text{rk } A \leq n$;
- $\text{rk } A$ не меняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов;
- Если к матрице добавить k столбцов (строк), то ранг а) не уменьшится, б) увеличится не более, чем на k .

Доказательство. 1) Ранг A равен рангу системы строк A , то есть равен максимальному числу ЛНЗ строк в матрице A . Это число не может быть больше, чем количество строк в матрице A , то есть m .

2) Ранг A равен рангу системы столбцов A , то есть равен максимальному числу ЛНЗ столбцов в матрице A . Это число не может быть больше, чем количество столбцов в матрице A , то есть n .

3) То, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях строк уже доказано (дано даже 2 доказательства этого факта отдельно для строчного и столбцового ранга в доказательствах лемм А и Б). Для того, чтобы доказать, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях столбцов скажем, что элементарное преобразование столбцов матрицы A равно композиции транспонирования, элементарного преобразования строк матрицы A^T и еще одного транспонирования. При каждом из действий ранг матрицы не меняется.

4) Пусть к матрице A прибавили k строк и получили матрицу B . Пусть строки $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ образовывали базис линейной оболочки строк A . Тогда $r = \text{rk } A$. Рассмотрим систему строк матрицы B , которая состоит из строк $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ и всех добавленных строк. Это полная в линейной оболочке строк матрицы B система из $r + k$ строк. В самом деле, любая строка из A выражается через строки $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$, а любая добавленная строка содержится в нашей системе. То есть любая строка B выражается через данные $k + r$ строк, следовательно, любой вектор из линейной оболочки строк B также выражается через данные $r + k$ строк. По лемме из этой полной системы можно выбрать базис. В нем будет не более, чем $r + k$ векторов. Таким образом, $\text{rk } B \leq \text{rk } A + k$. С другой стороны, среди строк матрицы A есть r линейно независимых. Они являются строками B , значит, ранг B не меньше r .

Утверждение для столбцов сводится к утверждению для строк транспонированием. $\square$