

Лекция 6

Теорема 1 (Теорема (Кронекер-Капелли)). *СЛУ совместна тогда и только, когда ранг матрицы коэффициентов A равен рангу расширенной матрицы коэффициентов $\tilde{A}$.*

Доказательство. Приведем матрицу $\tilde{A}$ к улучшенному ступенчатому виду. Оба ранга при этом не поменяются. В ступенчатом виде ранг равен количеству ненулевых строк. Как следует из свойств ранга, ранг $\tilde{A}$ либо равен рангу A , либо на 1 больше. Если $\text{rk } \tilde{A} = \text{rk } A + 1$, то в ступенчатом виде будет экзотическое уравнение и система несовместна. Если же $\text{rk } \tilde{A} = \text{rk } A$, то экзотического уравнения нет и система совместна. $\square$

Теорема 2 (критерий определенности СЛУ). *СЛУ определена тогда и только тогда, когда $\text{rk } \tilde{A} = \text{rk } A = n$, где n – количество переменных.*

Доказательство. Если СЛУ определена, то она совместна (и значит, $\text{rk } \tilde{A} = \text{rk } A$) и ступенчатый вид матрицы является строго ступенчатым, то есть количество ступенек (оно же ранг) равно количеству переменных. $\square$

Определение 1. Рассмотрим однородную СЛУ. Фундаментальная система решений (ФСР) этой СЛУ – это базис пространства решений.

Алгоритм построения ФСР Каждое решение задается значениями свободных неизвестных, которые могут быть любыми. Рассмотрим решения, свободные неизвестные которых принимают значения $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Главные переменные при этом будут принимать значения противоположные к соответствующему столбцу. Количество векторов в ФСР равно количеству свободных неизвестных.

Пример 1. Пусть улучшенный ступенчатый вид расширенной матрицы системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Свободные неизвестные – это x_2, x_3 и x_6 . ФСР имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Объяснение, почему алгоритм работает Данная система является линейно независимой, так как на месте i -ой свободной переменной в одном векторе 1, а в остальных – ноль. Если рассмотреть линейную комбинацию векторов из данной системы с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, то коэффициент при i -ой свободной переменной будет λ_i . Следовательно, данная линейная комбинация равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю.

Данная система $\{v_1, \dots, v_k\}$ полная. Покажем, что любое решение есть линейная комбинация данных. Рассмотрим решение u , у которого значения свободных переменных равны $a_1, \dots, a_k$. Покажем, что $u = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$. В самом деле, u и $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$ – два решения, у которых значения свободных переменных одинаковы. Так как главные переменные однозначно выражаются через свободные, то значения всех переменных совпадают.

Следствие 1. Рассмотрим однородную систему с матрицей A . Размерность пространства решений равна $n - \text{rk } A$, где n – количество переменных.

Доказательство. Размерность пространства решений равна мощности ФСР, что равно количеству свободных переменных, то есть n минус количество главных переменных. А количество главных переменных равно количеству ступенек в ступенчатом виде матрицы, то есть ранг A . $\square$

Структура решений неоднородной СЛАУ

Рассмотрим СЛУ с матрицей коэффициентов A и с правой частью b . Пусть $Z = (z_1, \dots, z_n)$ – некоторое частное решение. Тогда для любого решения $X = (x_1, \dots, x_n)$ ассоциированной с данной однородной системы (то есть однородной системы с той же матрицей коэффициентов), вектор $X + Z$ является решением неоднородной системы. Действительно

$$\sum a_{ij}x_j = 0, \sum a_{ij}z_j = b_i, \text{ следовательно } \sum a_{ij}(x_j + z_j) = b_i.$$

Напротив, если $Y = (y_1, \dots, y_n)$ – решение неоднородной системы, то $Y - Z$ – решение ассоциированной однородной.

Получаем следующее утверждение.

Предложение 1. Если неоднородная система линейных уравнений совместна, то общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения этой неоднородной системы плюс общее решение ассоциированной однородной системы.

Геометрически. Множество решений неоднородной системы – это пространство решений однородной системы, смещенное на вектор частного решения неоднородной системы.

Определение 2. Отображение φ из векторного пространства U в векторное пространство V называется *линейным*, если

- 1) $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$;
- 2) $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$.

Пример 2. 1) Отображение в ноль.

2) $U = V$, умножение на число. (В том числе, если число равно 1, то получаем тождественное отображение id .)

3) $U = V = \{\text{множество векторов на плоскости}\}$. Поворот относительно начала координат.

4) $U = V = \{\text{множество векторов в пространстве}\}$. Симметрия относительно плоскости, содержащей начала координат.

5) $U = \{\text{множество векторов на плоскости}\}$, $V = \{\text{множество векторов на прямой}\}$. Ортогональная проекция на ось OX .

6) $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^5$, $\varphi(x, y) = (x, y, x + y, 0, x)$.

7) $U = V = \mathbb{R}[x]$ – векторное пространство многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ от переменной x . Отображение дифференцирования $\varphi(f(x)) = f'(x)$.

Определение 3. Изоморфизм векторных пространств – это биективное линейное отображение. Если между U и V есть изоморфизм, то эти пространства называются *изоморфными*.

Изоморфные пространства являются одинаковыми с алгебраической точки зрения. То есть если их отождествить по данному изоморфизму (не различать u и $\varphi(u)$), то операции совпадут.