

Лекция 7

Определение 1. *Изоморфизм* векторных пространств (над одним и тем же полем F) – это биективное линейное отображение. Если между U и V есть изоморфизм, то эти пространства называются *изоморфными*.

Изоморфные пространства являются одинаковыми с алгебраической точки зрения. То есть если их отождествить по данному изоморфизму (не различать u и $\varphi(u)$), то операции совпадут.

Возникает вопрос, насколько много существует конечномерных векторных пространств с точностью до изоморфизма?

Теорема 1. *Любое n -мерное векторное пространство изоморфно F^n .*

Доказательство. Пусть U – векторное пространство с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда любой вектор $u \in U$ однозначно записывается в виде $\sum x_i e_i$. Рассмотрим $\varphi: U \rightarrow F^n, u \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. Докажем, что φ – изоморфизм.

Сперва докажем, что φ – линейное отображение. Пусть $u_1 = \sum x_i e_i, u_2 = \sum y_i e_i$. Тогда $u_1 + u_2 = \sum x_i e_i + \sum y_i e_i = \sum (x_i + y_i) e_i$. Следовательно,

$$\varphi(u_1 + u_2) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2).$$

Аналогично $\lambda u_1 = \lambda \sum x_i e_i = \sum \lambda x_i e_i$

$$\varphi(\lambda u_1) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda \varphi(u_1).$$

Итак, мы доказали, что φ – линейное отображение.

Теперь докажем, что φ – биекция. Для доказательства этого факта нам нужно доказать инъективность и сюръективность φ . Допустим, что φ не инъективно. Тогда существуют $u_1 \neq u_2$ такие, что $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$. Пусть $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда $u_1 = \sum x_i e_i = u_2$. Противоречие. Значит, φ – инъекция.

Докажем, что φ – сюръекция. Для этого надо найти прообраз для любого вектора $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$. По определению φ выполнено

$$\varphi\left(\sum x_i e_i\right) = (x_1, \dots, x_n).$$

Итак, φ – инъекция и сюръекция. То есть φ – биекция. □

Пусть $\varphi: U \rightarrow V$ – линейное отображение. Фиксируем базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в U и $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ в V . Тогда $\varphi(e_i) \in V$, а значит, существуют коэффициенты a_{ij} такие, что

$$\varphi(e_i) = a_{i1}f_1 + \dots + a_{im}f_m.$$

Скажем, что матрица $(a_{ij}) = A = A(\varphi, e, f)$ – это *матрица линейного отображения φ в базисах e и f* . В матрице A по столбцам стоят координаты в базисе f образов базисных векторов из e .

Пример 1. *Рассмотрим следующий пример: пусть $U = V$ – пространство векторов на плоскости. Пусть e_1 – единичный вектор вдоль оси Ox , а e_2 – единичный вектор вдоль оси Oy . И пусть $\varphi: U \rightarrow V = U$ – поворот на угол α (в направлении от оси Ox к оси Oy). Тогда образ вектора e_1 – это вектор с координатами $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ в базисе $\{e_1, e_2\}$. Аналогично образ вектора e_2 – это вектор с координатами $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ в базисе $\{e_1, e_2\}$. Таким образом матрица данного поворота в базисах $e = \{e_1, e_2\}$ и $e = \{e_1, e_2\}$ равна*

$$A(\varphi, e, e) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Операции с линейными отображениями Пусть $\varphi: U \rightarrow V, \psi: U \rightarrow V, \xi: V \rightarrow W$. Тогда определены следующие операции.

- Сумма линейных отображений φ и ψ . По определению $(\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u)$. Надо проверить, что отображение $\varphi + \psi$ линейно. В самом деле

$$(\varphi + \psi)(u_1 + u_2) = \varphi(u_1 + u_2) + \psi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \psi(u_1) + \psi(u_2) = (\varphi + \psi)(u_1) + (\varphi + \psi)(u_2),$$

$$(\varphi + \psi)(\lambda u) = \varphi(\lambda u) + \psi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) + \lambda \psi(u) = \lambda(\varphi + \psi)(u).$$

- Произведение линейного отображения на число. По определению $(c\varphi)(u) = c \cdot (\varphi(u))$. Проверим, что $c\varphi$ линейно.

$$c\varphi(u_1 + u_2) = c(\varphi(u_1 + u_2)) = (\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = c\varphi(u_1) + c\varphi(u_2).$$

$$c\varphi(\lambda u) = c(\varphi(\lambda u)) = (\lambda\varphi(u)) = c\lambda\varphi(u) = \lambda(c\varphi(u)).$$

- Композиция линейных отображений. $\xi \circ \varphi(u) = \xi(\varphi(u))$. Проверяем линейность:

$$\xi \circ \varphi(u_1 + u_2) = \xi(\varphi(u_1 + u_2)) = \xi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \xi(\varphi(u_1)) + \xi(\varphi(u_2)) = \xi \circ \varphi(u_1) + \xi \circ \varphi(u_2),$$

$$\xi \circ \varphi(\lambda u) = \xi(\varphi(\lambda u)) = \xi(\lambda\varphi(u)) = \lambda\xi(\varphi(u)) = \lambda(\xi \circ \varphi(u)).$$

Операции над матрицами. Проследим за матрицами линейных отображений при операциях. Пусть фиксированы базисы $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в U , $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ в V и $s = \{s_1, \dots, s_k\}$ в W . Пусть в этих базисах отображения имеют матрицы $A = A(\varphi, e, f)$, $B = A(\psi, e, f)$, $C = A(\xi, f, s)$. Обозначим $A + B = A(\varphi + \psi, e, f)$, $\lambda A = A(\lambda\varphi, e, f)$, $CA = A(\xi \circ \varphi, e, s)$.

- Сложение.

$$(\varphi + \psi)(e_i) = \varphi(e_i) + \psi(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j + \sum_{j=1}^m b_{ji} f_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + b_{ji}) f_j.$$

Таким образом

$$(A + B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji}.$$

- Умножение на число.

$$(\lambda\varphi)(e_i) = \lambda \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j \right) = \sum_{j=1}^m \lambda a_{ji} f_j, \text{ то есть } (\lambda A)_{ji} = \lambda a_{ji}.$$

- Умножение.

$$\begin{aligned} \xi \circ \varphi(e_i) &= \xi \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} f_j \right) = \sum_{j=1}^m a_{ji} \xi(f_j) = \sum_{j=1}^m a_{ji} \left(\sum_{p=1}^k c_{pj} s_p \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^k a_{ji} c_{pj} s_p = \sum_{p=1}^k \left(\sum_{j=1}^m c_{pj} a_{ji} \right) s_p \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(CA)_{pi} = \sum_{j=1}^m c_{pj} a_{ji}.$$

Итак, две матрицы X и Y можно умножить тогда и только тогда, когда X имеет размеры $k \times m$, а $Y - m \times n$. При произведении этих матриц получится матрица Z размера $k \times n$ и при этом

$$z_{ij} = \sum_{l=1}^m x_{il} y_{lj}.$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 1(-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4(-1) & 1(-2) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 1(-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ 5(-1) + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 8(-1) & 5(-2) + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 & 5(-3) + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 3 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 26 & 23 \\ -7 & 50 & 43 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Введем обозначение $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Свойства операций над матрицами

- 1) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 2) $A + 0 = 0 + A = A$
- 3) для каждой A есть $-A$ такая, что $A + (-A) = (-A) + A = 0$
- 4) $A + B = B + A$,
- 5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
- 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
- 7) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,
- 8) $1 \cdot A = A$.

Каждое из этих равенств стоит понимать так, что если определена одна часть равенства, то определена и вторая и тогда они равны.

Каждое из этих свойств легко сводится к соответствующему равенству для чисел. Например, доказательство первого свойства стоит заметить, что (i, j) элемент левой матрицы равен $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$, а правой $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. Эти числа равны.

Упражнение 1. Докажите остальные равенства.

Таким образом с операциями сложения и умножения на число матрицы $m \times n$ образуют векторное пространство. Легко видеть, что базисом этого векторного пространства является набор матриц E_{ij} , где E_{ij} имеет один ненулевой элемент, он равен 1 и стоит на месте (i, j) . Такие матрицы называются *матричными единицами* (не путайте с единичной матрицей). Таким образом

$$\dim \text{Mat}_{m,n} = mn.$$

Мы видели, что каждому линейному отображению $\varphi: V \rightarrow W$ при фиксированных базисах $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ в V и $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ в W можно сопоставить матрицу $A(\varphi, e, f)$ размера $m \times n$. В j -ом столбце матрицы $A(\varphi, e, f)$ стоят координаты вектора $\varphi(e_i)$ в базисе f .

Предложение 1. Соответствие $\varphi \rightarrow A(\varphi, e, f)$ задает биекцию между линейными отображениями $V \rightarrow W$ и матрицами $m \times n$.

Доказательство. Сперва докажем следующую полезную лемму.

Лемма 1. Пусть есть два векторных пространства V и W . Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис V и $w_1, \dots, w_n$ – векторы из W . Тогда существует единственное линейное отображение $\psi: V \rightarrow W$ такое, что $\psi(e_i) = w_i$ для всех i .

Доказательство леммы. Рассмотрим отображение $\psi: V \rightarrow W$, заданное по формуле

$$\psi\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i w_i.$$

Ясно, что так как $e_1, \dots, e_n$ – базис, то любой вектор из V представляется в виде $\sum_{i=1}^n a_i e_i$ единственным образом и потому отображение определено корректно. Также видно из определения, что $\psi(e_i) = w_i$ для всех i . Проверим, что ψ – линейное отображение. В самом деле, пусть $v_1 = \sum a_i e_i$ и $v_2 = \sum b_i e_i$. Тогда

$$\psi(v_1 + v_2) = \psi\left(\sum a_i e_i + \sum b_i e_i\right) = \psi\left(\sum (a_i + b_i) e_i\right) = \sum (a_i + b_i) w_i = \sum a_i w_i + \sum b_i w_i = \psi(v_1) + \psi(v_2);$$

$$\psi(\lambda v_1) = \psi\left(\lambda \sum a_i e_i\right) = \psi\left(\sum \lambda a_i e_i\right) = \sum \lambda a_i w_i = \lambda \sum a_i w_i = \lambda(\psi(v_1)).$$

Итак, мы проверили, что ψ линейно. То есть мы предъявили линейное отображение, переводящее e_i в w_i для всех i . Осталось объяснить, что линейное отображение с такими свойствами единственно. Для этого заметим, что раз ψ линейно, то выполнено

$$\psi\left(\sum a_i e_i\right) = \sum (a_i \psi(e_i)) = \sum a_i w_i.$$

То есть если ψ – линейное отображение, переводящее e_i в w_i для всех i , то оно задается именно формулой

$$\psi \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

и никак иначе. Лемма доказана. $\square$

Предложение сразу следует из Леммы, так как задание матрицы равносильно заданию образов $\varphi(e_i)$, так как в i -ом столбце матрицы как раз и стоят координаты этого вектора в базисе f . Получается, что для любой матрицы существует единственное линейное отображение, которое имеет эту матрицу в заданных базисах. Предложение доказано. $\square$

Ранее мы увидели, что с точки зрения сложения и умножения на число множество матриц $m \times n$ образует векторное пространство размерности mn с базисом из матричных единиц E_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Разберем несколько свойств умножения матриц.

Теорема 2 (Свойства умножения матриц). *В следующих выражениях если имеет смысл одна из сторон равенства, то имеет смысл и вторая и тогда они равны.*

- 1) $(AB)C = A(BC)$;
- 2) $A(B + C) = AB + AC$;
- 3) $(A + B)C = AC + BC$;
- 4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Доказательство. Для каждого утверждения есть 2 доказательства. Одно из них более техничное, через выкладки с матрицами. Второе – более концептуальное через линейные отображения. Дадим все эти доказательства. Будем обозначать доказательство I, если оно через матрицы и II – через отображения.

1) доказательство I. Для того, чтобы имела смысл левая часть нужно, чтобы матрица A была $m \times n$, матрица B чтобы была $n \times k$. Тогда их можно перемножить и получить матрицу AB размера $m \times k$. Чтобы ее можно было умножить на матрицу C нужно, чтобы C была $k \times r$. При этом матрица $(AB)C$ будет иметь размер $m \times r$. Несложно проследить ровно так же за выражением $A(BC)$ и увидеть, что оно имеет смысл также только при размерах $m \times n$, $n \times k$ и $k \times r$ матриц A , B и C соответственно, а итоговая матрица будет иметь размеры $m \times r$. Итак, условия на размеры и размеры итоговых матриц совпали.

Введем обозначения. $AB = D$, $DC = P$, $BC = F$, $AF = Q$. По определению произведения матриц имеем

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^k d_{il} c_{lj}.$$

При этом

$$d_{il} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tl}.$$

Получаем

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^k \left(\left(\sum_{t=1}^n a_{it} b_{tl} \right) c_{lj} \right) = \sum_{l=1}^k \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tl} c_{lj}.$$

Аналогично

$$q_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} f_{tj}.$$

При этом

$$f_{tj} = \sum_{l=1}^k b_{tl} c_{lj}.$$

Получаем

$$q_{ij} = \sum_{t=1}^n \left(a_{it} \left(\sum_{l=1}^k b_{tl} c_{lj} \right) \right) = \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^k a_{it} b_{tl} c_{lj}.$$

Видим, что выражения для p_{ij} и q_{ij} отличаются только порядком суммирования, а значит, равны.

Остальные доказательства (в том числе второе доказательство этого же факта) будут даны на следующей лекции.

□