Лекция 9

На прошлой лекции было доказано следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $A_1, \ldots, A_m$ – строки некоторой матрицы (каждое A_i – вектор). Тогда*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i.$$

Аналогично доказывается следующая лемма. Но можно еҷ вывести из данного следствия.

Лемма 1. *Пусть $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ – столбцы некоторой матрицы (каждое $A^{(i)}$ – вектор-столбец). Тогда*

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} & \ldots & A^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A^{(i)}.$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} A^{(1)} & \ldots & A^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \left(\left(\begin{pmatrix} A^{(1)} & \ldots & A^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right)^T \right)^T =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{(1)})^T \\ \vdots \\ (A^{(n)})^T \end{pmatrix} \right)^T = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (A^{(i)})^T \right)^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A^{(i)}.$$

□

Получено следующее утверждение.

Предложение 1. *а) Столбцы матрицы AB – это линейные комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами из столбцов матрицы B.*

б) Строки матрицы AB – это линейные комбинации строк матрицы B с коэффициентами из строк матрицы A.

Доказательство. При умножении матрицы A на матрицу B, матрица A умножается на каждый столбец, а затем составляется матрица из полученных столбцов.

Аналогично, B умножается на каждую строку матрицы A, а затем составляется матрица из полученных строк. □

Пример 1. *Рассмотрим произведение матриц*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 26 & 10 \\ 41 & 16 \\ 56 & 22 \end{pmatrix}.$$

Обозначим эти матрицы так, чтобы это равенство имело вид $AB = C$. Рассмотрим, например, 3-ю строку матрицы C. Она есть линейная комбинация строк B с коэффициентами из 3-й строки A. В самом деле:

$$(41, 16) = 7(1, -1) + 8(2, 4) + 9(2, -1).$$

Рассмотрим, например, 1-й столбец матрицы C. Он есть линейная комбинация столбцов A с коэффициентами из 1-го столбца B. В самом деле:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 26 \\ 41 \\ 56 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть* $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ *и* $B \in \mathrm{Mat}_{n,k}(\mathbb{R})$. *Тогда*

$$\mathrm{rk}(AB) \le \min\{\mathrm{rk}\, A, \mathrm{rk}\, B\}.$$

Доказательство. Нам нужно доказать, что $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}\, A$ и что $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}\, B$.

Докажем первое неравенство. Так как столбцы AB – это линейные комбинации столбцов A, то линейная оболочка столбцов матрицы AB лежит в линейной оболочке столбцов матрицы A. Это означает, что размерность линейной оболочки столбцов матрицы AB не превосходит размерности линейной оболочки столбцов матрицы A, что эквивалентно $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}\, A$.

Второе неравенство доказывается аналогично, только рассматривать надо строки. □

Замечание 1. Второе неравенство может быть выведено из первого используя тот факт, что при транспонировании ранг не меняется. В самом деле

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(AB)^T = \mathrm{rk}(B^T A^T) \le \mathrm{rk}\, B^T = \mathrm{rk}\, B.$$

Задача 1. Пусть A – матрица $m \times n$ и B – матрица $n \times k$. Тогда $\mathrm{rk}(AB) \ge \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B - n$.

Определение 1. Пусть A – матрица $m \times n$. Матрица B размера $n \times m$ называется *левой обратной* к матрице A, если $BA = E$.

Матрица B размера $n \times m$ называется *правой обратной* к матрице A, если $AB = E$.

Матрица B размера $n \times n$ называется *(двустороней) обратной* к матрице A, если она и левая и правая обратная к A.

Теорема 2. *а) Левая обратная к матрице A существует тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rk}\, A = n$.

б) Правая обратная к матрице A существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}\, A = m$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу BA. Если $\mathrm{rk}\, A < n$, то $\mathrm{rk}\, AB \le \mathrm{rk}\, A < n$. Так как $\mathrm{rk}\, E_n = n$, не может быть, что $AB = E$.

Пусть теперь $\mathrm{rk}\, A = n$. Тогда строки A – это полная система в F^n. В самом деле максимальная линейно независимая система строк матрицы A – это линейно независимая система из n векторов в F^n. Значит, она наибольшая по включению, то есть базис F^n.

Строки матрицы BA – это линейные комбинации строк A с коэффициентами из строк B. Мы можем подобрать i-ю строку B так, чтобы линейная комбинация строк A с такими коэффициентами равнялась $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Если так сделать со всеми строками B, получим $BA = E$.

Второе утверждение может быть доказано аналогично. □

Следствие 2. *К матрице A существует и левая и правая обратная тогда и только тогда, когда A – квадратная матрица $n \times n$ ранга n.*

Определение 2. Квадратную матрицу $n \times n$ будем называть *невырожденной*, если ее ранг равен n и *вырожденной* иначе (то есть если ее ранг меньше n).

Лемма 2. *Если B – левая обратная к матрице A, а C – правая обратная к матрице A, то $B = C$.*

Доказательство.

$$B = B(AC) = (BA)C = C.$$

□

Следствие 3. *К матрице A существует (двусторонняя) обратная тогда и только тогда, когда A – квадратная матрица $n \times n$ ранга n.*

Доказательство. Если существует обратная матрица, то она является и левой и правой обратной, а потому по следствию 2 матрица A квадратная и ее ранг совпадает с размером.

Наоборот, пусть A – квадратная матрица $n \times n$ ранга n. По следствию 2, существуют и левая обратная и правая обратная матрицы к A. По лемме 2 они совпадают. □

Следствие 4. *Обратная матрица к данной матрице A (когда она существует) единственная.*

Доказательство. Допустим, что есть 2 обратные матрицы: B и C. Тогда B в частности левая обратная, а C в частности правая обратная. По лемме 2 они совпадают. □

Замечание 2. Если $m \neq n$, то левая/правая обратная (если существует) будет определена не однозначно. Например, левыми обратными к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

будут как

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

так и

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Предложение 2. *Если для квадратных матриц A и B размера $n \times n$ выполнено одно из равенств $AB = E$ и $BA = E$, то выполнено и второе (и, соответственно, $B = A^{-1}$).*

Доказательство. Пусть выполнено $AB = E$. Тогда B – правая обратная к A. Так как правая обратная существует, $\operatorname{rk} A = n$. Следовательно, существует и левая обратная к матрице A, пусть это C. Тогда по лемме 2 выполняется $B = C$.

Второй случай (то есть когда $BA = E$) доказывается аналогично. □

Предложение 3 (Равенства с обратными матрицами)**.** *Для квадратных матриц $n \times n$ выполнены равенства:*

1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

2) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$; (левая и правая части определены или не определены одновременно)

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (левая и правая части определены или не определены одновременно)

Доказательство. 1) Пусть $A^{-1} = B$. Тогда $AB = E$, что означает, что $A = B^{-1}$.

2) Ранги матриц A и A^T одинаковы и потому либо они обе вырожденные, либо обе не вырожденные. Если они невырожденные, то

$$E = A^{-1}A = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T.$$

Отсдюда $(A^{-1})^T$ – это обратная к A^T матрица.

3) Если $\operatorname{rk} A < n$ или $\operatorname{rk} B < n$, то по теореме 1 выполнено $\operatorname{rk} AB < n$, то есть обе части не имеют смысла. Пусть теперь $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = n$. Тогда эти матрицы обратимы. Рассмотрим произведение

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Это означает, что матрица AB обратима и ее обратная равна $B^{-1}A^{-1}$. □

Следствие 5. *Произведение невырожденных матриц невырождено.*

Доказательство. Как мы уже доказали, невырожденность равносильна обратимости (то есть наличию обратной матрицы). А в пункте 3 предыдущего утверждения мы получили, что произведение двух обратимых матриц обратимо. □

Замечание 3. Предыдущее утверждение можно было бы доказать так: допустим, что A и B – невырожденные матрицы $n \times n$, а $\operatorname{rk} AB < n$. Тогда $A = (AB)B^{-1}$, а значит, $\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} AB < n$. Противоречие.

Замечание 4. Действие обращения матрицы имеет самый высокий приоритет (наравне с транспонированием).

Определение 3. Пусть φ – элементарное преобразование строк матрицы $m \times n$. Квадратная матрица $S \in \mathrm{Mat}_{m,m}$ называется *матрицей элементарного преобразования* φ (или элементарной матрицей), если для любой матрицы $m \times n$ матрица SA – это матрица, полученная из A элементарным преобразованием φ, то есть $\varphi(A) = SA$.

Лемма 3. *Для любого элементарного преобразования строк φ существует матрица S этого элементарного преобразования строк.*

Доказательство. Элементарное преобразование заключается в том, что строки матрицы $\varphi(A)$ – это некоторые фиксированные линейные комбинации строк A. Составим из коэффициентов этих линейных комбинаций строки S и получим матрицу элементарного преобразования φ. □

Определение 4. Пусть ψ – элементарное преобразование столбцов матрицы $m \times n$. Квадратная матрица $T \in \mathrm{Mat}_{n,n}$ называется *матрицей элементарного преобразования* ψ (или элементарной матрицей), если для любой матрицы $m \times n$ матрица AT – это матрица, полученная из A элементарным преобразованием ψ, то есть $\psi(A) = AT$.

Аналогично лемме 3 можно доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Для любого элементарного преобразования столбцов ψ существует матрица T этого элементарного преобразования строк.*

Замечание 5. Матрица S элементарного преобразования φ – это матрица, полученная из E этим элементарным преобразованием (строк или столбцов в зависимости от того, что за преобразование φ). В самом деле, если умножить E на матрицу S (с нужной стороны), то с ней произойдчт элементарное преобразование φ. С другой стороны получится в результате произведения именно матрица S.

Алгоритм поиска обратной матрицы. Пусть нам дана матрица A размера $n \times n$. Наша цель – проверить, обратима ли матрица A и, если да, то найти обратную.

1) приписываем справа к матрице A единичную матрицу такого же размера, получаем матрицу $Z = (A|E)$ размера $n \times 2n$.

2) Делаем элементарные преобразования строк матрицы Z так, чтобы левая часть привелась к улучшенному ступенчатому виду.

3) Если улучшенный ступенчатый вид левой части не E, то матрица A не обратима.

4) Если улучшенный ступенчатый вид A равен E, то получаем матрицу $(E|B)$. При этом $A^{-1} = B$.

Обоснование алгоритма (не было рассказано на лекции, будет рассказано на следующей лекции)

Если улучшенный ступенчатый вид квадратной матрицы A не единичный, то в нем есть нулевые строки. Это значит, что $\mathrm{rk}\, A < n$, то есть матрица не обратима.

Пусть теперь улучшенный ступенчатый вид A равен E. При элементарных преобразованиях строк матрица умножается слева на матрицу элементарного преобразования. Так как с обоими частями происходит одинаковое преобразование строк, они умножаются на одинаковые матрицы:

$$(A|E) \to (S_1A|S_1E) \to (S_2S_1A|S_2S_1E) \to \ldots \to (S_k \ldots S_1A|S_k \ldots S_1E) = (E|B).$$

Получаем, что $B = S_k \ldots S_1$ и $S_k \ldots S_1A = BA = E$, то есть $B = A^{-1}$