Лекция 2. Векторные пространства. Линейная зависимость векторов.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

7 сентября, 2021

Теорема.

- СЛУ несовместна тогда и только тогда, когда в ступенчатом виде есть экзотическое уравнение.
- СЛУ определена тогда и только тогда, когда ступенчатый вид расширенной матрицы коэффициентов является строго ступенчатым.
- В любом случае, кроме перечисленных двух, у СЛУ бесконечное количество решений.

Замечание. Когда мы привели расширенную матрицу коэффициентов $\widetilde{A}$ к ступенчатому виду, матрица коэффициентов A также приведена к ступенчатому виду. Пусть r – количество ненулевых строк в получившемся ступенчатом виде A, а $\widetilde{r}$ – количество ненулевых строк в получившемся ступенчатом виде $\widetilde{A}$. Тогда

- СЛУ совместна тогда и только тогда, когда $r = \widetilde{r}$;
- СЛУ определена тогда и только тогда, когда $r = \widetilde{r} = n$, где n – это количество переменных.

Напомним, что однородная система всегда совместна. А значит, для нее только 2 варианта: либо матрица строго ступенчатая и решение единственное (из всех нулей), либо матрица не строго ступенчатая и решений бесконечно много. Заметим, что ступенчатый вид матрицы заведомо не является строго ступенчатым, если количество строк меньше количества переменных. Получаем следующее утверждение.

Следствие. Если в однородной системе количество уравнений меньше количества переменных, то она обязательно имеет ненулевое решение (то есть решение не из всех нулей).

Матрица A имеет улучшенный ступенчатый вид, если
1) она имеет ступенчатый вид,
2) лидеры всех строк равны 1,
3) над лидерами в их столбцах стоят нули.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & *\dots* & 0 & *\dots* & 0 & *\dots* & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & *\dots* & 0 & *\dots* & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & *\dots* & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

К улучшенному ступенчатому виду легко привести элементарными преобразованиями из ступенчатого. Надо разделить каждую ненулевую строку на ее лидера, а затем вычесть более низкие строки из более высоких с подходящими коэффициентами.
Обратный ход метода Гаусса для такой матрицы заключается в перенесении в правую часть всего, кроме главной переменной.

Теорема. Каждая матрица имеет единственный улучшенный ступенчатый вид.

Доказательство. Рассмотрим матрицу A. Допустим, она может быть приведена элементарными преобразованиями к двум улучшенным ступенчатым видам B и C. Наша цель – доказать, что $B = C$. Рассмотрим однородную систему с матрицей коэффициентов A. Расширенная матрица коэффициентов $\widetilde{A} = (A|0)$ приводится к ступенчатым видам $(B|0)$ и $(C|0)$. Это означает, что однородные системы с матрицами коэффициентов B и C эквивалентны.
Пусть $B \neq C$, и пусть самый большой номер различных строк B и C – это k. Есть 2 варианта различаться строкам.

1 вариант.

Лидеры k-ой строки в матрицах B и C имеют различные позиции. Пусть лидерами являются элементы b_{kp} и c_{kq}. Без ограничения общности считаем, что $p < q$.
И того, что строки с номерами $> k$ у матриц B и C совпадают, следует, что разделение переменных x_i при $i > q$ на главные и свободные в системах $(B|0)$ и $(C|0)$ одинаково. Положим все свободные переменные с номерами $> q$ равными нулю. В системе $(C|0)$ переменная x_q главная, и следовательно (так как система однородная) при указанном задании переменных она также обязательно равна нулю. В системе $(B|0)$ переменная x_q свободная, а потому при указанном задании переменных она может принимать значение 1. Противоречие с эквивалентностью систем $(B|0)$ и $(C|0)$.

2 вариант.

Лидеры k-ой строки в матрицах B и C имеют одинаковые позиции b_{kp} и c_{kp}, но есть номер $s > p$ такой, что $b_{ks} \neq c_{ks}$. Без ограничения общности $b_{ks} \neq 0$. Тогда x_s – свободная переменная для системы $(B|0)$. Но так как строки с номерами больше k в системах $(B|0)$ и $(C|0)$ совпадают, получаем, что x_s – свободная переменная и для системы $(C|0)$. Более того набор свободных переменных с номерами $> p$ у систем одинаков. положим все свободные переменные с номерами $> p$ кроме x_s равными 0, а $x_s = 1$. Тогда $x_k = -b_{ks}$ для системы $(B|0)$ и $x_k = -c_{ks}$ для системы $(C|0)$. Это противоречит эквивалентности систем.

Теорема доказана.

Следствие.

Количество ненулевых строк в любом ступенчатом виде данной матрицы одинаково.

Определение.

Количество ненулевых строк в ступенчатом виде данной матрицы A называется <u>рангом</u> матрицы A и обозначается $\operatorname{rk} A$.

Пространство строк $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим множество V строк длины n, то есть упорядоченных наборов из n вещественных чисел $\{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$.
На этом множестве есть 2 операции:
1) сложение $+\colon V \times V \to V$

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

2) умножение на число $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$

$$\lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n).$$

Векторное пространство – это множество V – с двумя операциями: сложением $+\colon V \times V \to V$ и умножение на число $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

1) для любых $a, b, c \in V$ выполнено $(a+b)+c = a+(b+c)$;
2) существует $\overline{0} \in V$ такой, что для каждого $v \in V$ верно $\overline{0} + v = v + \overline{0} = v$;
3) для каждого $v \in V$ существует $-v \in V$ такой, что $v + (-v) = (-v) + v = \overline{0}$;
4) для любых $a, b \in V$ выполнено $a + b = b + a$;
5) для каждых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v, w \in V$ выполнено $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$;
6) для каждых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ выполнено $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$;
7) для каждых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ выполнено $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$;
8) для каждого $v \in V$ выполнено $1 \cdot v = v$.

Примеры.

- $\mathbb{R}$;
- Множество векторов на прямой/плоскости/в пространстве;
- Пространство строк;
- Многочлены;
- Функции на множестве;