Лекция 22.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

14 декабря, 2021

Определение

Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$ называется симметрическим, если для любой подстановки $\pi \in S_n$ выполнено

$$f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Примеры

- $f = c = const$,
- степенные суммы $s_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + \ldots + x_n^k$,
- элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

- если $f_1, \ldots f_m \in F[x_1, \ldots, x_n]$ – симметрические многочлены и $g \in F[y_1, \ldots, y_m]$. Тогда

$$h(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) -$$

симметрический многочлен

Замечание

То, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ симметрический равносильно тому, что коэффициенты при $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ и $x_1^{k_{\pi(1)}} \ldots x_n^{k_{\pi(n)}}$ одинаковы.

Теорема Виета

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in F[x]$ имеет $n = \deg f$ корней с учетом кратностей. То есть

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Тогда для каждого $1 \leq k \leq n$ выполнено

$$\sigma_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^k \frac{a_i}{a_0}.$$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} \ldots + a_n = \\
= a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) = \\
= a_0\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_k} xx\ldots(-\alpha_{i_1})\ldots x\ldots(-\alpha_{i_k})\ldots x = \\
= a_0\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}\sum_{i_1<\ldots<i_k}(-1)^k\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_k} = \\
= a_0\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}(-1)^k\sigma_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).
\end{aligned}
$$

Получаем $a_0(-1)^k\sigma_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = a_k$.

Лемма

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – ненулевой симметрический многочлен. Тогда если $LM(f) = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$, то $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$.

Доказательство. Допустим, что $a_j > a_i$ при $i < j$. Возьмем $\pi = (i, j)$. Тогда моном

$$x_1^{a_{\pi(1)}} \ldots x_n^{a_{\pi(n)}} = x_1^{a_1} \ldots x_i^{a_j} \ldots x_j^{a_i} \ldots x_n^{a_n}$$

входит в f с тем же (а значит, ненулевым) коэффициентом. Однако этот моном больше в лексикографическом порядке, чем $x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$. Противоречие.

Лемма

$$LT(\sigma_k(x_1, \dots x_n)) = x_1 \dots x_k.$$

Лемма

Для любого набора $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ выполнено

$$x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} = LT(\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3} \dots \sigma_{n-1}^{a_{n-1}-a_n}\sigma_n^{a_n}).$$

Доказательство.

$$LT(\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3} \dots \sigma_{n-1}^{a_{n-1}-a_n}\sigma_n^{a_n}) =$$
$$= LT(\sigma_1)^{a_1-a_2} LT(\sigma_2)^{a_2-a_3} \dots LT(\sigma_{n-1})^{a_{n-1}-a_n} LT(\sigma_n)^{a_n}) =$$
$$= x_1^{a_1-a_2}(x_1x_2)^{a_2-a_3} \dots (x_1 \dots x_{n-1})^{a_{n-1}-a_n}(x_1 \dots x_n)^{a_n} =$$
$$= x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}.$$

Следствие

Для любого симметрического многочлена f существуют единственные $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $c \in F$ такие, что $LT(f) = LT(c\sigma_1^{m_1} \dots \sigma_n^{m_n})$.

Основная теорема о симметрических многочленах.

Пусть $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$ – ненулевой симметрический многочлен. Тогда существует единственный многочлен $g \in F[y_1, \ldots, y_n]$ такой, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Доказательство существования. По следствию существуют $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $c \in F$ такие, что $LT(f) = LT(c\sigma_1^{m_1} \ldots \sigma_n^{m_n})$. Рассмотим $f_1 = f - c\sigma_1^{m_1} \ldots \sigma_n^{m_n}$. Старшие члены сократились. Значит, $LM(f) \succ LM(f_1)$. При этом f_1 – симметрический многочлен. Продолжим аналогично, стартуя с многочлена f_1. Получим последовательность $f, f_1, f_2, \ldots$, для которых верно, что $LM(f) \succ LM(f_1) \succ LM(f_2) \succ \ldots$ Так как не существует бесконечной убывающей цепочки мономов, данная последовательность должна прийти к нулевому многочлену. (Иначе можно продолжать эту цепочку.)

Доказательство единственности.

Предположим, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_1(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_n(x_1, \dots, x_n)) = \\ = g_2(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Положим $h = g_1 - g_2 \in F[y_1, \dots, y_n]$. Тогда

$$h(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_n(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

Допустим, что $h \neq 0$. Тогда для каждых различных членов $cy_1^{l_1} \dots y_n^{l_n}$ старшие мономы многочленов $\sigma_1^{l_1} \dots \sigma_n^{l_n}$ не совпадают. А значит, самый старший из этих старших членов ни с кем не сократится. Противоречие. Значит, $h = 0$, то есть $g_1 = g_2$.

Лемма

$$\deg g = \deg_{x_1} f.$$

Доказательство. Самая большая степень x_1 содержится в $LM(f) = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$. При этом в g входит $y_1^{a_1-a_2} y_2^{a_2-a_3} \dots y_n^{a_n}$ – моном суммарной степени a_1. Отсюда $\deg g \geq \deg_{x_1} f$.

С другой стороны, если g имеет моном $y_1^{b_1} \dots y_m^{b_m}$, то $\deg_{x_1}(\sigma_1^{b_1} \dots \sigma_m^{b_m})$ равна $\sum b_i$. Значит, в многочлене $\sigma_1^{b_1} \dots \sigma_m^{b_m}$ есть моном больше, чем $LM(f)$. Но тогда он должен сократиться. Как мы видели, сократиться со старшим членом многочлена $\sigma_1^{d_1} \dots \sigma_m^{d_m}$ он не может, следовательно, он сокращается с не старшим членом одного из таких многочленов. Значит

$$LM(\sigma_1^{d_1} \dots \sigma_m^{d_m}) \succ LM(\sigma_1^{b_1} \dots \sigma_m^{b_m}).$$

Выберем моном с максимальным $LM(\sigma_1^{b_1} \dots \sigma_m^{b_m})$, тогда он ни с кем не сократится. Противоречие.

Определение.

Пусть многочлен $f = a_0x^n + \ldots + a_n$ имеет n корней $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ с учетом кратности. Дискриминант $D(f)$ многочлена $f \in F[x]$ равен

$$D(f) = a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2.$$

Основное свойство дискриминанта.

$D(f) = 0$ тогда и только тогда, когда у f есть кратные корни.

Предложение.

D(f) – многочлен от коэффициентов a_i.

Доказательство. $\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2$ – симметрический многочлен. И его степень по x_1 равна $2n - 2$. Применяя теорему Виета, получаем утверждение предложения.