Лекция 4.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ

17 сентября, 2021

Было: 3 свойства линейной зависимости.

Свойство 1.

Пусть S и S' – две (конечные) системы векторов такие, что $S \subseteq S'$. Если система S ЛЗ, то система S' ЛЗ.

Свойство 2.

Система $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛЗ тогда и только тогда, когда существует номер $1 \leq j \leq k$ такой, что v_j равен некоторой линейной комбинации остальных векторов.

Свойство 3.

Пусть система $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ ЛНЗ и пусть система $S \cup \{w\} = \{v_1, \ldots, v_k, w\}$ ЛЗ. Тогда существует единственный набор чисел $\mu_1, \ldots, \mu_k$ такой, что $w = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k$.

Лемма. (Основная лемма о линейной зависимости)

Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ и $\{w_1, \ldots, w_m\}$ – две системы векторов. И пусть каждый вектор v_i линейно выражается через $w_1, \ldots, w_m$. Если $n > m$, то система $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ЛЗ.

Доказательство. Введем обозначения для коэффициентов выражения v_i через $w_1, \ldots, w_m$:

$$v_i = a_{1i} w_1 + \ldots + a_{mi} w_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i a_{ji} w_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji} w_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ji} \right) w_j.$$

Покажем, что найдутся не все нулевые $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\lambda_i = 0$ для каждого j. Тогда для таких $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ получим $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \overline{0}$, то есть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ЛЗ.
Получаем однородную СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1n}\lambda_n = 0; \\ \ldots \\ a_{m1}\lambda_1 + \ldots + a_{mn}\lambda_n = 0. \end{cases}$$

У этой однородной СЛУ количество уравнений меньше количества неизвестных. Следовательно, решений бесконечно много. А значит, есть ненулевое решение.
Лемма доказана.

Линейная зависимость бесконечных систем

Определение.

Пусть S – возможно бесконечная система векторов. Тогда линейной комбинацией S мы называем выражение вида $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in S$.

Линейная комбинация называется нетривиальной, если хотя бы один вектор входит в нее с ненулевым коэффициентом.

Определение.

Система S называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация ее векторов, равная нулевому вектору.

Упражнение. Докажите свойства линейной зависимости номер 1, 2 и 3 для бесконечных систем векторов.

Определение.

Линейная оболочка системы векторов S – это множество всевозможных линейных комбинаций векторв из S. Обозначается линейная оболочка S через $\langle S\rangle$.

$$\langle S\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \mid r \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in S\right\}.$$

Пример

Пусть $S = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$. Тогда

$$\langle S\rangle = \langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle = \{\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0)\} = \\ = \{(\lambda_1, \lambda_2, 0)\} = \{x_3 = 0\}.$$

Теорема

Пусть S – система векторов в векторном пространстве V. Тогда подмножество $\langle S\rangle \subset V$ является подпространством.

Доказательство. Пусть $w = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \in \langle S\rangle$. Тогда

$$\alpha \cdot w = \sum_{i=1}^{r} \alpha\lambda_i v_i \in \langle S\rangle$$

Теперь пусть у нас есть две линейные комбинации из $\langle S\rangle$. Без ограничения общности мы можем считать, что в них вошли одинаковые векторы (если в одной из линейных комбинаций вектор не присутствовал, то добавим его туда с коэффициентом ноль.) Имеем $w = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i, u = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i v_i \in \langle S\rangle$. Тогда

$$w + u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{r} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i + \mu_i) v_i \in \langle S\rangle.$$

Определение.

Базис системы векторов S – это максимальная по включению линейно независимая подсистема векторов.

Переформулировка. Базис системы векторов S – это подсистема $B \subset S$ такая, что
1) B ЛНЗ.
2) Для каждого $v \in S \setminus B$ выполнено $B \cup \{v\}$ ЛЗ.

Определение.

Подсистема $L \subseteq S$ называется полной, если любой вектор из S выражается как линейная комбинация векторов из L.

Переформулировка. $L \subseteq S$ – полная подсистема тогда и только тогда, когда $\langle L \rangle = \langle S \rangle$.

Теорема.

Пусть B – подсистема векторов в системе S. Следующие условия эквивалентны:

1. B – базис S;
2. B – ЛНЗ полная подсистема;
3. B – минимальная по включению полная подсистема;
4. каждый вектор из S выражается как линейная комбинация векторов из B, причем единственным образом.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть B – базис. Тогда B ЛНЗ по определению. Нужно лишь доказать, что B – полная подсистема. Возьмем $v \in S \setminus B$. Тогда система $B \cup \{v\}$ ЛЗ по определению базиса. По свойству 3 линейной зависимости вектор v является линейной комбинацией векторов из B.

$2 \Rightarrow 3$. По условию система B полная. Допустим, что для некоторого $w \in B$ система $B \setminus \{w\}$ также является полной. Но тогда w линейно выражается через элементы $B \setminus \{w\}$. То есть найдутся $e_1, \ldots, e_k \in B$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ такие, что $w = \sum \lambda_i e_i$. Но тогда B линейно зависима по свойству 2 линейной зависимости.

$3 \Rightarrow 4$. Пусть B – минимальная по включению полная подсистема. Тогда по определению полной подсистемы каждый вектор из S линейно выражается через B. Допустим, что есть вектор $v \in S$ такой, что он выражается двумя различными способами:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i, \qquad e_i \in B; \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}.$$

Получаем $0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) e_i$ – нетривиальная линейная комбинация. По свойству 2 найдется e_j, который выражается через остальные. Тогда система $B \setminus \{e_j\}$ полная. Противоречие.

$4 \Rightarrow 1$. Допустим, что B ЛЗ. Тогда по свойству 2 существует $w \in B$, такой, что

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \qquad e_i \in B \setminus \{w\}, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Получаем два линейных выражения w через B. Второе имеет вид $w = 1w$. Противоречие. Значит, B ЛНЗ.
Рассмотрим $v \in S \setminus B$. По условию вектор v линейно выражается через B. Тогда по свойству 2 $B \cup \{v\}$ ЛЗ.
Теорема доказана.

Часто интересен случай, когда $S = V$ – векторное пространство. Если B – базис V, то $V = \langle B \rangle$.

Пусть B – базис пространства V. Тогда каждый вектор $v \in V$ однозначно раскладывается по B (то есть линейно выражается через B). Коэффициенты этого выражения называются <u>координатами</u> v в базисе B. Мы будем интересоваться случаем $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда каждому вектору v сопоставляется строка из его координат $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Примеры.

- Любой ненулевой вектор e на прямой образует базис. Координата вектора v – это коэффициент пропорциональности v и e.
- Любые 2 неколлинеарных вектора на плоскости образуют базис.
- Любые 3 некомпланарных вектора в пространстве образуют базис.
- Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

  Координаты вектора $(x_1, \dots, x_n)$ в этом базисе – это $x_1, \dots, x_n$.

Определение.

Векторное пространство V называется <u>конечномерным</u>, если сущетсвует конечный набор векторов $v_1, \dots, v_k$ такой, что $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Далее в течение всего курса, если не оговорено противное, мы будем предполагать все пространства конечномерными.

Лемма.

В конечномерном пространстве любую линейно независимую систему можно дополнить до конечного базиса.

Доказательство. Пусть $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. И пусть $\{e_1, \ldots, e_m\}$ – линейно независимая подсистема в V. Тогда, если эта система максимальна по включению, то она базис. Иначе существует $e_{m+1} \in V$ такой, что $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}$ – линейно независимая система. Будем так добавлять векторы в систему пока можем. Бесконечно этот процесс длиться не может, так как по ОЛЛЗ при $m > k$ мы получим линейно зависимую систему.

Следствие.

Любое конечномерное пространство имеет конечный базис.

Доказательство. Возьмем систему $\{e \neq 0\}$ и дополним ее до базиса.