Представления

Определение 1. Пусть G – группа. Линейным представлением G называется гомоморфизм $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ для некоторого пространства V.

Морфизм между представлениями $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\psi\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ – это линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ такое, что $\varphi \circ \rho(g) = \psi(g) \circ \varphi$.

Два представления называются изоморфными, если есть морфизм, являющийся изоморфизмом векторных пространств.

Задача 1. Пусть группа G действует на множестве X. Докажите, что $\rho(f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ являестя представлением в пространстве фукнкций на X.

Задача 2. Докажите, что одномерные представления G находятся в биекции с одномерными представлениями G/G'

Задача 3. Опишите (постройте таблицу) все одномерные представления группы

а) $\mathbb{Z}_3$
б) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
в) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$
г) D_n
д) S_n
е) A_4
ж) Q_8
р) $\mathbb{Z}_4 \times D_6$

Определение 2. $U \subset V$ – нвариантное подпространство, если $\forall g \in G, u \in U$: $\rho(g)(u) \in U$.

Представление неприводимо, если нет нетривиальных инвариантных пространств.

Представление вполне приводимо, если разлагается в прямую сумму неприводимых.

Задача 4. Докажите, что в пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ являтся представлением группы $\mathbb{R}$ $\rho(t)(f)(x) = f(x-t)$.

Найти инвариантные подпространства.

Теорема 1. *Теорема Машке. Пусть ρ – конечномерное представление конечной группы G, причём характеристика поля не делит $|G|$, тогда представление вполне приводимо.*

Задача 5. Докажите, что любое комплексное представление конечной абелевой группы есть прямая сумма одномерных.

Задача 6. Привести примеры, показывающие, что условие конечности группы и не делимости порядка группы на характеристику поля существенны в теореме Машке.

Задача 7. Найти число неизоморфных 5-мерных представлений группы $\mathbb{Z}_4$.